UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES APPLIQUÉES

PAR
CHARLES PAPILLON

SUR UNE ÉQUATION DE RICCATI TRIDIMENSIONNELLE DANS LES QUATERNIONS ET SES SYMÉTRIES

JUIN 2018

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Sébastien Tremblay, directeur de recherche

Département de mathématiques et informatique

M. Dominic Rochon, juré

Département de mathématiques et informatique

M. Jean-François Quessy, juré

Département de mathématiques et informatique

SUR UNE ÉQUATION DE RICCATI TRIDIMENSIONNELLE DANS LES QUATERNIONS ET SES SYMÉTRIES

Charles Papillon

SOMMAIRE

Nous savons depuis le début du 20e siècle que le monde physique qui nous entoure est composé de symétries. Par conséquent, les équations de la physique qui le gouverne sont elles-mêmes composées de symétries et leur utilisation permet de simplifier grandement ces équations et permet de mieux comprendre les phénomènes physiques. Dans notre cas, l'équation qui nous intéresse est l'équation de Riccati. Celle-ci est une équation différentielle unidimensionnelle non linéaire pour laquelle une généralisation dans les quaternions permet de traiter le cas tridimensionnel. L'équation de Riccati ayant un lien direct avec la célèbre équation de Schrödinger, cette généralisation en trois dimensions trouve une application directe avec le monde de la physique quantique, une théorie physique qui est développée dans trois dimensions d'espace et une de temps.

L'objectif premier de ce mémoire est d'aborder une généralisation de l'équation de Riccati dans les biquaternions. Pour ce faire, l'équation de Riccati standard est présentée et les quaternions ainsi que les biquaternions sont développés. Puis, afin de mieux comprendre l'équation de Riccati tridimensionnelle étudiée dans ce mémoire, les groupes de symétries sont utilisés pour trouver des solutions à l'équation non linéaire. Enfin, le mémoire se termine avec une solution non triviale de l'équation de Schrödinger tridimensionnelle stationnaire.

ON A THREE-DIMENSIONAL RICCATI EQUATION IN QUATERNIONS AND ITS SYMMETRIES

Charles Papillon

ABSTRACT

We know from the beginning of the 20th century that the physical world around us is composed of symmetries. Consequently, the equations of the physics which governs it are themselves composed of symmetries and their use makes it possible to simplify these equations considerably and allows a better understanding of the physical phenomena. In our case, we are interested by the Riccati equation. This is a one-dimensional nonlinear differential equation for which a generalization in the quaternions allows to handle the three-dimensional case. Since Riccati equation has a direct link with the famous Schrödinger equation, this three-dimensional generalization finds direct application in the world of quantum physics, a physical theory that is developed in three dimensions of space and one of time.

The first objective of this thesis is to treat a generalization of the Riccati equation in biquaternions. To do this, the standard Riccati equation is presented and the quaternions as well as the biquaternions are developed. Then, for a better understanding of the three-dimensional Riccati equation studied in this paper, groups of symmetries are used to find solutions to the nonlinear equation. Finally, the dissertation ends with a non-trivial solution of the stationary three-dimensional Schrödinger equation.

AVANT-PROPOS

Durant mon double baccalauréat en mathématiques et en enseignement des mathématiques au secondaire, Dr Sébastien Tremblay m'a donné l'occasion de faire un projet synthèse sur les quaternions, un sujet qui m'a très vite passionné. Un peu plus tard, il m'a parlé de ses recherches sur l'équation de Riccati généralisée dans les quaternions et grâce au soutien du département de mathématiques de l'UQTR, j'ai eu l'occasion d'approfondir ce sujet avec lui. À la fin de mon double baccalauréat, le sujet de mon mémoire pour la maîtrise était fixé et celui-ci était parfaitement dans mes champs d'intérêt (physique, équations différentielles, nombres hypercomplexes et groupes de symétries).

Ayant aussi une formation en enseignement, il était très important pour moi que ce mémoire soit le plus accessible possible. Malgré tout, certaines connaissances de base en mathématiques sont nécessaires.

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de recherche, Dr Sébastien Tremblay. Celui-ci m'a initié à plusieurs sujets mathématiques intéressants, et ce, depuis mon premier cours du baccalauréat; il a permis la publication d'un article dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2018) et il a été d'une grande aide dans la rédaction de ce mémoire. Je remercie aussi ma conjointe, Laurianne, qui a été à mes côtés tout au long de ce périple durant lequel je suis aussi devenu papa. Finalement, je tiens à remercier l'Institut des sciences mathématiques (ISM) pour leur support financier.

Table des matières

Introduction

L'équation de Riccati est une équation différentielle ordinaire non linéaire et non homogène d'ordre un. Il s'agit de la plus simple des équations non linéaires, car si nous connaissons une solution, l'équation peut être linéarisée et être complètement résolue. Cette équation joue d'ailleurs un rôle très important en physique et en mathématique. En effet, celle-ci est intimement liée à la théorie des fonctions de Bessel et nous la retrouvons aussi en géométrie différentielle projective. Dans notre cas, nous verrons plutôt le lien étroit qu'elle possède avec l'équation de Schrödinger en physique. Le premier chapitre comprend un historique de l'équation de Riccati, les principaux résultats reliés à cette équation différentielle, quelques applications où nous la retrouvons et une généralisation dans les complexes.

Étant donné l'importance de l'équation de Riccati en physique-mathématique, une généralisation dans les biquaternions, et donc dans l'espace, s'impose. Pour arriver à cette généralisation, nous allons d'abord présenter les quaternions. Ce corps non commutatif découvert par Hamilton est surtout utilisé pour représenter des rotations dans l'espace, mais il permet aussi de généraliser des équations différentielles dans $\mathbb{R}^3$. Finalement, en considérant les nombres complexes plutôt que les nombres réels comme composantes aux quaternions, nous allons considérer les biquaternions. Le second chapitre aborde l'historique des quaternions, plusieurs propriétés des quaternions, les biquaternions, la dérivé dans $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ et une généralisation de l'équation de Riccati dans les biquaternions. Cette généralisation a été publiée dans *Journal of Mathemati-*

cal Analysis and Applications dans l'article intitulé : «On a three-dimensional Riccati differential equation and its symmetries», (Février 2018) [26].

Les symétries sont le troisième sujet étudié dans ce mémoire. Grâce à Galois et à Lie, les groupes de symétries sont aujourd'hui très utilisés. Ces groupes apparaissent évidemment en géométrie, mais nous les retrouvons maintenant dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique. Ainsi, il est possible de trouver les groupes de symétries d'une équation algébrique ou d'une équation différentielle. Une fois les symétries d'une équation trouvées, nous pouvons aussi utiliser les symétries afin de simplifier l'équation et mieux comprendre le phénomène physique. Le troisième chapitre inclut une introduction aux symétries, une partie de la théorie des groupes de symétries et des exemples où nous trouvons les groupes de symétries de différentes équations différentielles. De son côté, le quatrième et dernier chapitre est consacré à la réduction par symétrie avec une introduction, une partie théorique et des exemples.

Évidemment, parmi les exemples des chapitres 3 et 4, nous retrouvons de nouveau la généralisation de l'équation de Riccati dans les quaternions publié avec mon directeur de recherche [26]. Le dernier chapitre se termine d'ailleurs en donnant une solution à cette équation, et par le fait même, à l'équation de Schrödinger stationnaire dans l'espace.

Chapitre 1

Équation de Riccati standard

Dans ce chapitre, nous allons traiter principalement de l'équation de Riccati dans les réels ($\mathbb{R}$). Nous ferons d'abord un bref historique de l'équation [7, 28, 37]. Par la suite, nous donnerons les principaux résultats liés à cette équation. Puis, nous regarderons quelques applications dans lesquelles l'équation de Riccati apparaît. Finalement, nous terminerons le chapitre avec un aperçu de l'équation de Riccati généralisée dans les complexes.

1.1 Historique

En 1694, John Bernoulli (1667-1748) s'intéresse à l'équation $y' = y^2 + x^2$ [i], mais celui-ci, dans des lettres envoyées à Leibniz (1646-1716), admet être incapable de la résoudre. Neuf ans plus tard, son frère James Bernoulli (1654-1705) trouve la solution sous forme de séries de puissances. En 1724, dans Acta Eruditorum, Jacopo Francesco

i. Le prime ($'$) représente la dérivée par rapport à la variable indépendante de la variable dépendante. Ainsi, pour le reste du chapitre $y' := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ où y est une fonction qui dépend de x.

Riccati (1676-1754) discute de la forme plus générale

$$y' + ay^2 = bx^n \tag{1.1}$$

où $a, b, n \in \mathbb{R}$, mais sans trouver les solutions. L'année suivante, Daniel Bernoulli (1700-1782) publiera dans la même revue les solutions de l'équation (1.1) pour les valeurs de n où la solution contient un nombre fini de termes.

L'équation (1.1) peut encore être généralisée sous la forme

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0 \tag{1.2}$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions réelles. Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire non linéaire à laquelle nous ferons référence dans ce document lorsque nous parlerons de l'équation de Riccati.

Par la suite, Leonhard Euler (1707-1783) s'est aussi intéressé à l'équation de Riccati (1.2) ; nous lui devons d'ailleurs les théorèmes 1.1 et 1.2 de la prochaine section. D'autres mathématiciens dont D'Alembert (1717-1783), Liouville (1809-1882), Schläfli (1814-1895), Cayley (1821-1895) et Picard (1856-1941), pour ne nommer que ceux-ci, se sont également penchés sur cette équation. D'Alembert a d'ailleurs été le premier a utiliser le nom de Riccati pour l'équation (1.2).

De nos jours, l'équation de Riccati est utile dans de nombreux domaines. En effet, elle apparaît, entre autres, en mécanique quantique, en thermodynamique statistique, ainsi qu'en cosmologie [12, 30, 35]. De plus, elle est intimement liée aux fonctions de Bessel qui apparaissent elles-mêmes dans plusieurs autres domaines [37].

1.2 Résultats

Dans cette section, nous allons présenter les principaux résultats associés à l'équation de Riccati (1.2). Nous aborderons d'abord les cas où nous connaissons une ou plusieurs solutions, puis nous traiterons les autres résultats, dont la transformation en une équation canonique et la transformation en une équation d'ordre deux.

1.2.1 Résolution avec solutions particulières

En général, Liouville a montré que l'équation de Riccati (1.2) n'est pas résoluble. Toutefois, la situation est différente si nous connaissons une ou plusieurs solutions particulières [7, 15]. Dans ce qui suit, nous regarderons ce qui se passe lorsque nous connaissons respectivement une, deux, trois ou quatre solutions particulières de l'équation (1.2).

Théorème 1.1 (Théorème d'Euler). [7, 15, 37] *Si nous connaissons une solution particulière y_0 de l'équation* (1.2), *alors l'équation de Riccati se réduit à une équation de Bernoulli non linéaire en posant $y = y_0 + z$. La solution générale est alors obtenue par deux quadratures.*

Preuve

En posant $y = y_0(x) + z(x)$, l'équation (1.2) devient

$$y_0' + a(x)y_0^2 + b(x)y_0 + c(x) + z' + a(x)(2y_0z + z^2) + b(x)z = 0.$$

Puisque y_0 est une solution particulière, alors

$$y_0' + a(x)y_0^2 + b(x)y_0 + c(x) = 0.$$

Par conséquent, des deux dernières équations, nous avons

$$z' + a(x)z^2 + (2a(x)y_0 + b(x))z = 0$$

qui est une équation de Bernoulli non linéaire. Ainsi, la solution générale peut être obtenue par deux quadratures. ■

Théorème 1.2 (Théorème d'Euler). [7, 37] *Si nous connaissons deux solutions particulières* y_1 *et* y_2 *de l'équation* (1.2), *alors la solution générale est donnée par*

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = k \exp \int a(x)(y_2 - y_1)\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

où k *est une constante d'intégration.*

Preuve

Puisque y_1 est une solution de l'équation (1.2), alors $y_1' = -a(x)y_1^2 - b(x)y_1 - c(x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& y' - y_1' = -a(x)y^2 - b(x)y - c(x) + a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x) \\
\Leftrightarrow\ & (y - y_1)' = -a(x)(y^2 - y_1^2) - b(x)(y - y_1) \\
\Leftrightarrow\ & (y - y_1)' = -a(x)(y + y_1)(y - y_1) - b(x)(y - y_1) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(y - y_1)'}{y - y_1} = -a(x)(y + y_1) - b(x) \\
\Leftrightarrow\ & (\ln(y - y_1))' = -a(x)(y + y_1) - b(x).
\end{aligned}$$

De la même façon, puisque y_2 est une solution de l'équation (1.2),

$$(\ln(y - y_2))' = -a(x)(y + y_2) - b(x).$$

Ainsi, des deux dernières équations, nous avons

$$\begin{aligned}
&(\ln(y-y_1))' - (\ln(y-y_2))' = (-a(x)(y+y_1)-b(x)) - (-a(x)(y+y_2)-b(x)) \\
\Leftrightarrow\ &\left(\ln\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right)\right)' = a(x)(y_2-y_1) \\
\Leftrightarrow\ &\ln\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right) = \int a(x)(y_2-y_1)\mathrm{d}x + k_1 \text{ [ii]} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{y-y_1}{y-y_2} = k\exp\int a(x)(y_2-y_1)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.3. *Notons qu'en isolant y dans l'équation* (1.3), *nous obtenons*

$$y = \frac{ky_2\exp\left(\int a(x)(y_2-y_1)\mathrm{d}x\right) - y_1}{k\exp\left(\int a(x)(y_2-y_1)\mathrm{d}x\right) - 1} \tag{1.4}$$

où k est une constante d'intégration.

Théorème 1.4 (Théorème de Weyr et Picard). [7, 15, 37] *Si nous connaissons trois solutions particulières y_1, y_2 et y_3 de l'équation* (1.2), *alors la solution générale est donnée sans intégration par*

$$\frac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)} = k \tag{1.5}$$

où k est une constante.

Preuve

Du théorème 1.3, nous avons

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = k_1\exp\int a(x)(y_2-y_1)\mathrm{d}x.$$

ii. Pour tout le mémoire, sauf indications contraires, $\forall i \in \mathbb{N}$, c_i et k_i sont des constantes arbitraires.

Ainsi, pour une certaine constante k_2, nous avons

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = k_2 \exp \int a(x)(y_2 - y_1)\mathrm{d}x.$$

En multipliant par k_2 la première équation et par k_1 la seconde, nous obtenons

$$k_2 \frac{y - y_1}{y - y_2} = k_1 \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}.$$

Puisque le rapport $\frac{k_1}{k_2}$ est une constante,

$$\frac{(y - y_1)(y_3 - y_2)}{(y - y_2)(y_3 - y_1)} = k.$$

■

Remarque 1.5. *Notons qu'en isolant y dans l'équation* (1.5), *nous obtenons*

$$y = \frac{y_1(y_3 - y_2) + ky_2(y_1 - y_3)}{(y_3 - y_2) + k(y_1 - y_3)} \tag{1.6}$$

où k est une constante.

Remarque 1.6. [15] *Le rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation de Riccati* (1.2) *est constant. De plus, la solution générale est une fonction rationnelle de la constante d'intégration. Ainsi, si $y = \frac{kf_1+f_2}{kf_3+f_4}$ où k est une constante et où f_1, f_2, f_3 et f_4 sont des fonctions en x, alors y est une solution d'une certaine équation de Riccati.*

Théorème 1.7 (Théorème de Weyr et Picard)**.** [7, 37] *Si nous connaissons quatre solutions particulières y_1, y_2, y_3 et y_4 de l'équation* (1.2), *alors*

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_3 - y_2)} = k \tag{1.7}$$

où k est une constante.

Preuve

Ceci découle directement du théorème 1.4 en remplaçant y par y_1, y_1 par y_2 et y_2 par y_4. ■

De plus, l'équation (1.7) est équivalente à

$$\frac{(y_1-y_2)'}{y_1-y_2}+\frac{(y_3-y_4)'}{y_3-y_4}-\frac{(y_1-y_4)'}{y_1-y_4}-\frac{(y_3-y_2)'}{y_3-y_2}=0. \tag{1.8}$$

En effet, en dérivant l'équation (1.7), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(y_1-y_2)'(y_3-y_4)(y_1-y_4)(y_3-y_2)\\
&+(y_1-y_2)(y_3-y_4)'(y_1-y_4)(y_3-y_2)\\
&-(y_1-y_2)(y_3-y_4)(y_1-y_4)'(y_3-y_2)\\
&-(y_1-y_2)(y_3-y_4)(y_1-y_4)(y_3-y_2)'=0.
\end{aligned}$$

Puis, en divisant tous les termes par $(y_1-y_2)(y_3-y_4)(y_1-y_4)(y_3-y_2)$, nous obtenons l'équation (1.8).

1.2.2 Autres résultats

Regardons maintenant ce qui se passe avec l'équation de Riccati (1.2) si nous ne connaissons pas de solutions particulières. Tout d'abord, nous remarquons que si $a(x)=0$, alors l'équation (1.2) est une équation linéaire de Bernoulli. Ainsi, la solution est donnée par

$$y=ke^{-\int b(x)\mathrm{d}x}-e^{-\int b(x)\mathrm{d}x}\int c(x)e^{\int b(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

où k est une constante [15]. D'ailleurs, en faisant un changement de variable, le même phénomène se produit si l'équation est homogène, c.-à-d. si $c(x)=0$.

Théorème 1.8. *Si* $c(x)=0$, *alors la solution de l'équation* (1.2) *est donnée par* $y=\frac{1}{v}$

où

$$v = ke^{\int b(x)\mathrm{d}x} + e^{\int b(x)\mathrm{d}x}\int a(x)e^{-\int b(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{1.10}$$

et k est une constante.

Preuve

Avec $c(x) = 0$, en posant $v = \frac{1}{y}$, l'équation (1.2) devient

$$v' - b(x)v = a(x)$$

qui est une équation de Bernoulli linéaire. La solution est alors donnée par

$$v = ke^{\int b(x)\mathrm{d}x} + e^{\int b(x)\mathrm{d}x}\int a(x)e^{-\int b(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

où k est une constante. ■

L'équation de Riccati (1.2) peut aussi être réécrite sous une forme canonique en faisant un changement de variable [37]. Elle prend alors la forme suivante :

$$u' + u^2 = v(x) \tag{1.11}$$

où

$$v = \frac{2a^2b' + 3\left(a'\right)^2 + a^2b^2 - 2aa'' - 2aba' - 4a^3c}{4a^2}$$

et

$$u = \frac{2a^2y + ab - a'}{2a}.$$ [iii]

Cette dernière équation est d'ailleurs celle que nous allons généraliser dans les biquaternions au chapitre 2.

Finalement, l'équation de Riccati (1.2) peut toujours être transformée en une équa-

iii. Pour alléger les équations, $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ ont été remplacées respectivement par a, b et c.

tion différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre deux [7, 15, 37]

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0. \tag{1.12}$$

Pour ce faire, il suffit de poser $y = \frac{u'}{a(x)u}$. Ainsi, $P(x) = b(x) - \frac{a'(x)}{a(x)}$ et $Q(x) = a(x)c(x)$.

La transformation inverse est aussi possible en posant $y = \frac{u'}{u}$ (transformation de Cole-Hopf). De cette façon, l'équation (1.12) devient l'équation (1.2) avec $a(x) = 1$, $b(x) = P(x)$ et $c(x) = Q(x)$.

Ainsi, la théorie de l'équation de Riccati est équivalente à la théorie des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre deux. Cette équivalence est sans aucun doute l'aspect le plus important de l'équation de Riccati [37].

1.3 Applications

Dans cette section, nous allons aborder différentes applications de l'équation de Riccati. Nous discuterons de l'équation de Schrödinger, de la chute d'un corps et des fonctions de Bessel. Évidemment, plusieurs autres sujets pourraient être mentionnés ici, mais nous avons décidé de nous limiter à ceux-ci.

1.3.1 Équation de Schrödinger

L'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste est l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,\vec{r}) + V(t,\vec{r})\psi(t,\vec{r}) \tag{1.13}$$

où i est l'unité imaginaire, $\hbar$ est la constante de Planck réduite, Δ est le laplacien, t est le temps, $\vec{r}$ est la position de la particule, V est l'énergie potentielle et ψ est la fonction d'onde (complexe).

Maintenant, si nous considérons l'équation de Schrödinger stationnaire en une dimension, nous obtenons

$$-\psi'' + q(x)\psi = 0 \tag{1.14}$$

où $q(x)$ est le potentiel.

Cette dernière équation est une équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre deux et, par conséquent, elle peut être réécrite comme une équation de Riccati canonique (1.11) en posant $u = \frac{\psi'}{\psi}$. Ainsi, l'équation (1.14) devient

$$u' + u^2 = q(x). \tag{1.15}$$

De plus, l'opérateur de Schrödinger $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x)$ peut être factorisé par

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x) = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + u(x)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - u(x)\right) \tag{1.16}$$

si et seulement si l'équation (1.15) est satisfaite [6, 21].

1.3.2 Chute d'un corps avec résistance

Un problème simple où l'équation de Riccati apparaît est la chute d'un corps où la résistance varie proportionnellement au carré de la vitesse [7]. Ce type de résistance se retrouve, entre autres, lorsque nous considérons le saut d'un parachutiste avant qu'il ouvre son parachute. En effet, dans ce cas, la vitesse du parachutiste correspond approximativement à l'équation suivante :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - Kv^2 \tag{1.17}$$

où m est la masse du corps, v est la vitesse du corps, t est le temps écoulé, K est le coefficient de frottement et g est la force gravitationnelle. L'équation (1.17) est équivalente à l'équation de Riccati

$$v' + \frac{K}{m}v^2 - g = 0 \tag{1.18}$$

et la solution est donnée par

$$v = \frac{rm}{K}\left(\frac{e^{rt} - ce^{-rt}}{e^{rt} + ce^{-rt}}\right) \tag{1.19}$$

où $r = \sqrt{\frac{Kg}{m}}$ et c est une constante qui dépend des conditions initiales [7].

1.3.3 Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel apparaissent dans plusieurs problèmes mathématiques et physiques. Il s'agit des fonctions qui sont les solutions de l'équation différentielle de Bessel [37]

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \alpha^2)u = 0. \tag{1.20}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, les solutions sont données par

$$u_\alpha(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+\alpha)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\alpha}. \tag{1.21}$$

Sinon, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons le même type de solutions, mais nous devons faire intervenir la fonction gamma qui permet d'appliquer la factorielle sur un nombre qui n'est pas un entier. Ainsi, les solutions sont données par

$$u_\alpha(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\alpha}. \tag{1.22}$$

Le lien entre les fonctions de Bessel et l'équation de Riccati vient du fait que l'équation différentielle de Bessel (1.20) peut être transformée en une équation de Riccati (1.2). En effet, puisque l'équation (1.20) est équivalente à

$$u'' + \frac{1}{x}u + \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2}u = 0 \tag{1.23}$$

qui est une équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre deux comme l'équation (1.12), alors en posant $y = \frac{u'}{u}$, celle-ci peut être transformée en l'équation de Riccati suivante :

$$y' + y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2} = 0. \tag{1.24}$$

Ainsi, en appliquant le procédé inverse, nous pouvons trouver les solutions de l'équation de Riccati (1.24) en utilisant les fonctions de Bessel.

1.4 Équation de Riccati complexe

Dans cette section, nous aborderons l'équation de Riccati généralisée dans les complexes. Cela nous permettra de mieux comprendre la généralisation dans les biquaternions au chapitre 2. Nous donnerons d'abord une première généralisation intuitive qui permet de généraliser plusieurs résultats obtenus précédemment. Puis, nous donnerons une deuxième généralisation qui nous permettra de conserver le lien qui unit l'équation de Schrödinger et l'équation de Riccati.

1.4.1 Première généralisation

Une première généralisation de l'équation de Riccati dans les complexes est donnée en utilisant l'équation de Riccati (1.2) avec des fonctions complexes [13]. Ainsi, la généralisation est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + a(z)w^2 + b(z)w + c(z) = 0 \tag{1.25}$$

où w est une fonction complexe inconnue qui dépend de z et où $a(z)$, $b(z)$ et $c(z)$ sont des fonctions complexes connues.

À partir de cette généralisation, tous les résultats obtenus précédemment sont encore valides et la plupart des démonstrations sont données dans [13].

Nous insistons ici sur le fait que comme dans le cas réel, l'équation (1.25) peut toujours être transformée en une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} + P(z)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + Q(z)u = 0 \tag{1.26}$$

en posant $w = \frac{u'}{a(z)u}$. À l'inverse, l'équation (1.26) peut être transformée en une équation de Riccati (1.25) en posant $w = \frac{u'}{u}$.

1.4.2 Seconde généralisation

Dans la section 1.3, nous avons été en mesure de faire un lien entre l'équation de Schrödinger stationnaire de dimension un (1.14) et l'équation de Riccati (1.2). Bien entendu, nous aimerions avoir le même lien entre l'équation de Schrödinger stationnaire de dimension deux et l'équation de Riccati complexe. Pour ce faire, nous devons utiliser une autre approche pour généraliser l'équation de Riccati dans les complexes.

La deuxième approche consiste à généraliser la forme canonique de l'équation de Riccati. Ainsi, l'équation (1.11) devient

$$\partial_{\bar{z}} Q(z) + |Q(z)|^2 = v(z) \tag{1.27}$$

où $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $Q(z)$ est une fonction complexe et $v(z)$ est une fonction réelle. En utilisant cette généralisation, l'équation de Schrödinger stationnaire de dimension deux

$$-\psi'' + q(x,y)\psi = 0 \tag{1.28}$$

est reliée à l'équation de Riccati complexe (1.27) [16, 19].

De plus, les résultats obtenus précédemment sont encore valides pour cette généralisation [16] et l'équation (1.27) apparaît entre autres dans la mécanique quantique supersymétrique [4].

Chapitre 2

Quaternions

Ce second chapitre concerne principalement les quaternions, mais les biquaternions seront aussi présentés, ainsi qu'une généralisation de l'équation de Riccati. Nous donnerons d'abord un bref historique de la découverte des quaternions [1, 8, 11]. Puis, nous allons présenter les quaternions et quelques résultats qui s'y rattachent. Par la suite, nous aborderons les grandes lignes des biquaternions. Cela nous permettra ensuite de bien définir la dérivée quaternionique et biquaternionique. Enfin, nous terminerons ce chapitre avec la généralisation de l'équation de Riccati canonique (1.11) dans les quaternions et dans les biquaternions.

2.1 Historique

Le 4 mai 1748, Leonhard Euler (1707-1783) envoie une lettre à Christian Goldbach (1690-1764) dans laquelle il fait référence aux quaternions. Toutefois, celui-ci ne les mentionne pas explicitement et n'ayant probablement pas reconnu le caractère fondamental de cette structure, il les utilise uniquement d'une façon vectorielle.

Cent ans plus tard, Olinde Rodrigues (1795-1851) utilise des nombres similaires aux quaternions pour décrire les rotations dans un espace à trois dimensions. Par la suite, Carl Frederick Gauss (1777-1855) travaillera aussi sur les quaternions, mais il ne publiera aucun résultat.

En 1833, le mathématicien irlandais, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) montre que les nombres complexes forment une algèbre. Puis pendant plus de dix ans, il essaie de montrer que la même chose est possible avec des triplets (2 unités imaginaires), mais sans succès. Grâce à Frobenius (1843-1917), nous savons aujourd'hui que cela est impossible (une analyse rapide de ce cas est donnée immédiatement après l'historique).

Enfin, le matin du 16 octobre 1843, alors qu'il marche avec sa femme sur le bord du Canal Royal à Dublin, Hamilton a une inspiration soudaine et il réalise que s'il utilise trois unités imaginaires, plutôt que deux, son problème est résolu. Ainsi, pour être certain de ne pas oublier sa solution, il grave $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ sur les pierres du pont Broome (les pierres ont été remplacées par une plaque commémorative). La découverte des quaternions est une des découvertes les mieux documentées des mathématiques, car immédiatement après cet événement, Hamilton a écrit une lettre à son fils Archibald où il lui raconte tous les détails de cette découverte. D'ailleurs, chaque année, le 16 octobre, le département de mathématiques de l'université nationale d'Irlande refait la marche d'Hamilton jusqu'au pont Broome pour commémorer sa découverte [5].

Finalement, le premier article sur les quaternions paraît le 14 novembre 1843 dans le livre du conseil de l'Académie Royale. Pour ce qui est du mot quaternion, celui-ci signifie ensemble de quatre en latin, mais surtout Tétractys en Grec. Le Tétractys est à la base de presque tout pour les pythagoriciens et nous savons qu'Hamilton aimait beaucoup la symbolique des pythagoriciens. Plus de détails sur ce sujet sont donnés dans [1].

2.1.1 Impossibilité des triplets

Hamilton savait que les nombres complexes pouvaient être utilisés pour représenter des rotations dans le plan. Par conséquent, il cherchait une algèbre utilisant des triplets pour pouvoir, entre autres, représenter des rotations dans l'espace tridimensionnel. Voyons maintenant rapidement pourquoi l'idée des triplets ne fonctionne pas [5].

Prenons comme base $(1, i, j)$ tel que $i^2 = j^2 = -1$. Puisque nous voulons une algèbre, la multiplication doit être fermée. Regardons maintenant les différentes possibilités pour la multiplication de i avec j.

1. Si $ij = \pm 1$, alors $iij = \pm i$. Toutefois, $iij = i^2 j = -j$. Ainsi, $j = \mp i$ et cela contredit le fait que $(1, i, j)$ est une base.

2. Si $ij = \pm i$, alors $iij = \pm i^2 = \mp 1$. Toutefois, $iij = i^2 j = -j$. Ainsi, $j = \pm 1$ et cela contredit le fait que $(1, i, j)$ est une base.

3. Si $ij = \pm j$, alors $ijj = \pm j^2 = \mp 1$. Toutefois, $ijj = ij^2 = -i$. Ainsi, $i = \pm 1$ et cela contredit le fait que $(1, i, j)$ est une base.

4. Si $ij = 0$, alors $iij = ijj = 0$ et par conséquent, $i = j = 0$.

Ainsi, l'idée des triplets $(1, i, j)$ avec $i^2 = j^2 = -1$ ne fonctionne pas. Le cas où $i^2 = -1$ et $j^2 = 1$ ne fonctionne pas non plus, de même que le cas où $i^2 = j^2 = 1$.

Puisque les triplets ne fonctionnent pas, nous devons rajouter une nouvelle unité à la base. Ainsi, nous pouvons créer les quaternions $(1, i, j, k)$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ou les nombres bicomplexes $(1, i_1, i_2, j)$ avec $i_1^2 = i_2^2 = -1$ et $j^2 = 1$.

2.2 Quaternions

Dans cette section, nous allons définir les quaternions et les opérations sur ceux-ci en utilisant la même approche que dans [8]. Puis, nous allons regarder les principales propriétés de ce corps non commutatif. Enfin, nous verrons les transformations géométriques dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^4$.

2.2.1 Construction des quaternions

Les quaternions sont des nombres hypercomplexes qui sont définis comme suit :

Définition 2.1. L'ensemble des quaternions est noté $\mathbb{H}$ où

$$\mathbb{H} = \{x | x = (x_0, x_1, x_2, x_3),\ x_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, 3\}.$$

Les coordonnées de x sont données par x_0, x_1, x_2 et x_3. De plus, si x et y sont deux quaternions, alors x et y sont égaux si et seulement si les coordonnées placées au même endroit sont égales : $x_k = y_k$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Sur cet ensemble de nombres, nous pouvons définir l'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication standard.

Définition 2.2. L'addition de deux quaternions x et y est donnée par

$$x + y = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

La multiplication d'un quaternion x par un scalaire λ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$\lambda x = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

La multiplication de deux quaternions x et y est donnée par

$$\begin{aligned} xy = (&x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3, \quad x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2, \\ &x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1, \quad x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0). \end{aligned}$$

Voici maintenant un exemple des opérations de la dernière définition.

Exemple 2.3. Soit $\lambda = 10$, $x = (1, 2, 3, 4)$, $y = (5, 6, 7, 8)$, alors

$$\begin{aligned} \lambda x &= (10, 20, 30, 40), \\ x + y &= (6, 8, 10, 12), \\ xy &= (-60, 12, 30, 24), \\ yx &= (-60, 20, 14, 32). \end{aligned}$$

De cet exemple, nous remarquons que la multiplication de deux quaternions n'est pas commutative. Cela implique aussi qu'en général, $(xy)^2 \neq x^2y^2$.

Remarque 2.4. *La définition de la multiplication correspond à la multiplication dans* $\mathbb{R}^4$ *avec la base canonique :* $e_0 = (1, 0, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 0, 1)$ *où* e_0 *est l'élément neutre de la multiplication et où les autres éléments de la base satisfont les deux relations suivantes :*

$$e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}\,^{\mathrm{i}} \textit{ pour } i, j = 1, 2, 3 \quad \textit{et} \quad e_1e_2 = e_3.$$

Théorème 2.5. [22] *Les quaternions munis de l'addition et de la multiplication forment un corps non commutatif.*

Preuve

Pour montrer que les quaternions forment un corps non commutatif, nous devons

i. Il s'agit du delta de Kronecker, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.

montrer que $(\mathbb{H},+)$ et que $(\mathbb{H}-\{0\},*)$ [ii] forment des groupes et que la multiplication est distributive sur l'addition.

Par définition de l'addition, $(\mathbb{H},+)$ forme un groupe, car $(\mathbb{R},+)$ est un groupe. L'élément neutre additif est donné par $(0,0,0,0)$ et l'inverse additif d'un élément $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$ est donné par $-x=(-x_0,-x_1,-x_2,-x_3)$.

Par définition de la multiplication $(\mathbb{H}-\{0\},*)$ est fermé, car la multiplication sur $\mathbb{R}$ est fermée. De plus, en développant les termes, nous remarquons que $(\mathbb{H}-\{0\},*)$ est associatif. Finalement, l'élément neutre de la multiplication est donné par $(1,0,0,0)$ et l'inverse multiplicatif d'un élément $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0,0)$ est donné par

$$x^{-1}=\frac{1}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}(x_0,-x_1,-x_2,-x_3).$$

Finalement, puisque si $x,y,z\in\mathbb{H}$ nous avons $x(y+z)=xy+xz$ et $(x+y)z=xz+yz$, alors $(\mathbb{H},+,*)$ forme un corps non-commutatif. ■

Théorème 2.6. [8] $\mathbb{H}$ *est un espace vectoriel sur le corps des réels.*

Preuve

Il suffit de vérifier les propriétés d'un espace vectoriel.

1. $(\mathbb{H},+)$ est un groupe commutatif.

2. Si $a,b\in\mathbb{R}$ et $v,w\in\mathbb{H}$, alors :
   - $a(v+w)=av+aw$ et $(a+b)v=av+bv$ (distributivité à gauche),
   - $(ab)v=a(bv)$ (associativité),
   - $1v=v$ (élément neutre).

■

ii. Le symbole $*$ représente la multiplication quaternionique de la définition 2.2

Corollaire 2.7. $\mathbb{H}$ *forme une algèbre de division sur* $\mathbb{R}$.

Preuve

D'après le théorème 2.5, $(H, +, *)$ est un corps, donc un anneau. D'après le théorème 2.6, $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Enfin, $\forall x, y \in \mathbb{H}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b).$$

Ainsi, $\mathbb{H}$ est une algèbre de division sur $\mathbb{R}$. ■

Dans les livres, différentes notations sont utilisées pour représenter un quaternion. En effet, un quaternion x est parfois écrit

$$x = (x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3), \quad x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \text{ ou } x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Par souci de commodité, nous utiliserons la dernière forme qui se traduit par

$$x = \sum_{k=0}^{3} x_k e_k = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \text{ [iii]}.$$

Finalement, voici quelques notations supplémentaires qui nous serons utiles pour la suite.

Définition 2.8. Si $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, alors :

- x_0 est la partie scalaire de x que nous notons $\mathrm{Sc}\,(x)$,
- $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ est la partie vectorielle de x que nous notons $\boldsymbol{x}$ ou $\mathrm{Vec}\,(x)$,
- $x_0 - \boldsymbol{x}$ est le conjugué quaternionique de x que nous notons $\overline{x}$,
- $\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ est le module ou la valeur absolue de x que nous notons $|x|$.

iii. e_0 est souvent omis, car il s'agit de l'élément neutre de la multiplication.

2.2.2 Propriétés des quaternions

Voyons maintenant quelques propriétés des quaternions. Pour plus de légèreté, la plupart des preuves sont données dans l'annexe A.

Théorème 2.9. [8] *Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :*

1. $\mathrm{Sc}(x) = \frac{x+\overline{x}}{2}$,
2. $\boldsymbol{x} = \frac{x-\overline{x}}{2}$,
3. $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$,
4. $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}, x \neq 0$,
5. $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$,
6. $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$,
7. $\overline{\overline{x}} = x$,
8. $|xy| = |x||y|$,
9. $|\overline{x}| = |-x| = |x|$,
10. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, xy \neq 0$.

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Théorème 2.10. [29] *Soit $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, alors*

1. $\overline{x} = -\dfrac{1}{2}(x + e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_3xe_3)$,
2. $x_0 = \dfrac{1}{4}(x - e_1xe_1 - e_2xe_2 - e_3xe_3)$,
3. $x_1 = \dfrac{1}{4e_1}(x - e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_3xe_3)$,
4. $x_2 = \dfrac{1}{4e_2}(x + e_1xe_1 - e_2xe_2 + e_3xe_3)$,
5. $x_3 = \dfrac{1}{4e_3}(x + e_1xe_1 + e_2xe_2 - e_3xe_3)$.

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Théorème 2.11. [8] *Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :*

1. $|\mathrm{Sc}(x)| \leq |x|$ *et* $|\boldsymbol{x}| \leq |x|$,
2. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité du triangle)*,
3. $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Théorème 2.12. *La valeur absolue $|\cdot|$ est une norme.*

Preuve

Tout d'abord, pour $x \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} |x| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

De plus, du théorème précédent, nous avons

$$\forall x, y \in \mathbb{H}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Enfin, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} |\lambda x| &= \sqrt{(\lambda x_0)^2 + (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 x_0^2 + \lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + \lambda^2 x_3^2} = \sqrt{\lambda^2 (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \\ &= |\lambda| \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\lambda||x|. \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme. ■

Remarque 2.13. *En utilisant la distance euclidienne* $|x-y|$, $\mathbb{H}$ *est un espace métrique complet.*

Dans la définition 2.8, nous avons vu qu'un quaternion peut être décomposé en une partie scalaire et une partie vectorielle. Lorsque la partie scalaire vaut 0, nous avons uniquement une partie vectorielle et nous dirons que le quaternion est un vecteur (ou un quaternion pur). Nous devons donc définir le produit scalaire et le produit vectoriel.

Définition 2.14. Le produit scalaire entre deux quaternions x et y est défini par

$$x \cdot y = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Si $x \cdot y = 0$, nous disons que x et y sont orthogonaux.

De cette définition, nous avons $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ qui correspond parfaitement au produit scalaire entre deux vecteurs.

Définition 2.15. Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ est défini par

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3.$$

Ainsi, de ces deux définitions, les multiplications entre deux quaternions et entre deux vecteurs sont données respectivement par

$$xy = x_0y_0 + x_0\boldsymbol{y} + y_0\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \tag{2.1}$$

et

$$\boldsymbol{xy} = -\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}. \tag{2.2}$$

De ces deux égalités, nous obtenons les équivalences données dans le prochain théorème.

Théorème 2.16. [8] *Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :*

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = -\mathrm{Sc}\,(\boldsymbol{xy}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{yx})$,
2. $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \mathrm{Vec}\,(\boldsymbol{xy}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx})$,
3. $\boldsymbol{x}^2 = -|\boldsymbol{x}|^2$.

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Nous avons vu qu'il faut faire attention lorsque nous manipulons les quaternions, car la multiplication n'est pas commutative. Toutefois, il ne s'agit pas de la seule particularité dont il faut se méfier.

Théorème 2.17. [8] *Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :*

1. *$x = \boldsymbol{x} \neq 0$ si et seulement si x^2 est réel et négatif,*
2. *$x = x_0 \neq 0$ si et seulement si x^2 est réel et positif,*
3. *$x^2 = y^2$ n'implique pas nécessairement $x = \pm y$,*
4. *x est un nombre réel si et seulement si $\forall y \in \mathbb{H}$, $yx = xy$.*

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Le prochain théorème est très important, car il nous permet de réécrire les quaternions d'une autre façon. Ce résultat est l'analogue de la forme polaire que nous avons avec les nombres complexes.

Théorème 2.18 (Forme polaire). [8] *Soit* $x \in \mathbb{H}$ *avec* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, *alors* $x = |x|(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi)$

$$\text{où} \quad \cos\varphi = \frac{x_0}{|x|}, \quad \sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|x|} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}.$$

Preuve

La preuve est purement algébrique et elle utilise le fait que $|x|$ et $|\boldsymbol{x}|$ sont des nombres réels. Ainsi,

$$\begin{aligned} x = x_0 + \boldsymbol{x} = x_0 + \boldsymbol{x}\frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|} &= |x|\left(\frac{x_0}{|x|} + \frac{\boldsymbol{x}}{|x|}\frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|}\right) \\ &= |x|\left(\frac{x_0}{|x|} + \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\frac{|\boldsymbol{x}|}{|x|}\right) = |x|(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi). \end{aligned}$$

■

Exemple 2.19. Soit $x = \sqrt{3} + 2e_1 + 2e_2 + e_3$, alors $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $|x| = \sqrt{12}$ et $|\boldsymbol{x}| = 3$. Ainsi,

$$x = \sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \frac{2e_1 + 2e_2 + e_3}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Enfin, nous avons l'équivalent de la formule de De Moivre qui facilite beaucoup l'exponentiation dans les quaternions.

Corollaire 2.20 (Formule de De Moivre). [8] *Soit* $x = x_0 + \boldsymbol{x} \in \mathbb{H}$ *où* $x \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *alors*

$$(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin n\varphi.$$

Preuve

Voir l'annexe A. ■

2.2.3 Transformations géométriques

Comme nous l'avons dit plus tôt, il n'existe pas d'algèbre équivalente à l'espace tridimensionnel. Toutefois, en rajoutant une dimension, nous avons les quaternions. Il est donc commun d'utiliser la partie vectorielle des quaternions pour représenter l'espace en trois dimensions. En effet, il suffit d'associer le quaternion pur $q = xe_1 + ye_2 + ze_3$ au point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. À partir de cette représentation, il est facile d'utiliser les quaternions pour représenter les différentes transformations géométriques en trois dimensions et même en quatre dimensions [8].

Avant d'aborder les transformations, nous devons d'abord présenter les automorphismes et les involutions, car les transformations géométriques dans l'espace sont directement reliées à ces concepts.

Définition 2.21. Un automorphisme m est une application bijective m qui va d'un espace à lui-même et qui satisfait la propriété $m(xy) = m(x)m(y)$ où x, y sont des éléments de l'espace.

Remarque 2.22. *Si $m(xy) = m(y)m(x)$, alors m est un antiautomorphisme.*

Définition 2.23. Une involution est une application bijective qui est sa propre réciproque. Ainsi, si f est une application bijective, f est une involution si et seulement si $f = f^{-1}$.

Regardons maintenant trois applications qui sont des involutions :

1. La conjugaison est l'application $x \mapsto \overline{x}$.
2. L'involution principale est l'application $x \mapsto \widehat{x}$ où $\widehat{x} = e_2 x e_2^{-1}$.
3. La réversion est l'application $x \mapsto \tilde{x}$ où $\tilde{x} = \widehat{\overline{x}} = \overline{\widehat{x}}$. Elle correspond à la composition de la conjugaison et de l'involution principale.

Ainsi, nous avons que si $x \in \mathbb{H}$, alors

- $\overline{x} = x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3$,
- $\widehat{x} = x_0 - x_1e_1 + x_2e_2 - x_3e_3$,
- $\tilde{x} = x_0 + x_1e_1 - x_2e_2 + x_3e_3$.

Parmi ces involutions, la conjugaison et la réversion sont des antiautomorphismes, alors que l'involution principale est un automorphisme.

Le prochain théorème est très important, car il est à la base des rotations dans l'espace.

Théorème 2.24 (Rodrigues-Porteous). [8] *Un automorphisme ou un antiautomorphisme m de l'algèbre $\mathbb{H}$ peut toujours être représenté par*

$$m(x) = x_0 + h(\mathbf{x}), \quad x \in \mathbb{H}$$

où h est un automorphisme orthogonal dans $\mathbb{R}^3$.

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Voyons maintenant une autre application importante des quaternions qui nous permettra de faire des rotations dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.25. L'application ρ_y est définie comme suit :

$$\rho_y : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ x & \mapsto & yxy^{-1} \end{array} \quad \text{où } y \neq 0 \in \mathbb{H}.$$

Cette application possède plusieurs propriétés intéressantes qui sont données dans le prochain théorème.

Théorème 2.26. [8] *Pour $x, x' \in \mathbb{H}$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, l'application ρ_y possède les propriétés suivantes :*

1. $\rho_y(\lambda x + \lambda' x') = \lambda \rho_y(x) + \lambda' \rho_y(x')$,
2. $\rho_y(xx') = \rho_y(x)\rho_y(x')$,
3. ρ_y *est un automorphisme isométrique sur* $\mathbb{H}$,
4. *le produit scalaire canonique dans* $\mathbb{R}^4$ *est invariant sur l'application* ρ_y*, c.-à-d.* $\rho_y(x) \cdot \rho_y(x') = x \cdot x'$,
5. $\rho_y \rho_{y'} = \rho_{yy'}$,
6. ρ_y *est homomorphe par rapport au produit vectoriel, c.-à-d.* $\rho_y(\boldsymbol{x}) \times \rho_y(\boldsymbol{x'}) = \rho_y(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x'})$.

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Puisque l'application ρ_y ne dépend pas de $|y|$, nous allons considérer uniquement les y tel que $|y| = 1$. Géométriquement, cela correspond aux éléments de la sphère unitaire S^3 dans $\mathbb{R}^4$.

Rotations dans $\mathbb{R}^3$

En algèbre linéaire, nous savons que les rotations dans l'espace peuvent être représentées par des matrices.

Théorème 2.27. [8] *Soit A une matrice orthogonale où* $\det A = 1$*, alors A est une matrice de rotation.*

En d'autres mots, si $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$ et $\det A = 1$, alors l'application $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est une rotation. Dans le cas où $\det A = -1$, l'orientation est inversée et cela représente donc une réflexion de la rotation.

Théorème 2.28. *L'application ρ_y représente une rotation dans $\mathbb{R}^3$.*

Preuve

D'après le théorème 2.24 de Rodrigues-Porteous, $\rho_y(\boldsymbol{x})$ reste un vecteur. Par conséquent, ρ_y est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ qui possède les mêmes propriétés que dans $\mathbb{H}$. De plus, dans $\mathbb{R}^3$, ρ_y est homomorphe par rapport au produit vectoriel, donc ρ_y laisse aussi l'orientation invariante. Par conséquent, ρ_y représente une rotation dans $\mathbb{R}^3$. ■

Regardons maintenant ce qui se passe si nous appliquons ρ_y à $\mathbf{x}$.

Théorème 2.29 (Formule d'Euler-Rodrigues). [8] *Soit $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Vec}(\mathbb{H})$, en prenant $y \in \mathbb{H}$ sous forme polaire avec $|y| = 1$, nous obtenons*

$$\rho_y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})\sin 2\varphi + (1 - \cos 2\varphi)(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}.$$

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Finalement, le prochain théorème nous permet d'effectuer des rotations dans l'espace.

Théorème 2.30. [8] *Toute application ρ_y est une rotation d'angle 2φ par rapport à l'axe $\boldsymbol{\omega}$. À l'inverse, toutes les rotations dans $\mathbb{R}^3$ peuvent être représentées par une application ρ_y.*

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Voyons maintenant des exemples de rotations dans $\mathbb{R}^3$. Dans le premier exemple, nous allons partir d'une rotation (angle et axe) pour trouver l'application ρ_y correspondante. Puis, dans le deuxième exemple, nous allons partir de l'application ρ_y pour trouver la rotation associée.

Exemple 2.31. Soit une rotation de 60° dans le sens antihoraire autour de l'intersection des plans $z = x$ et $y = x$. De ces informations, nous avons $\varphi = 30°$ et $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$. Par conséquent,

$$y = (\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}\sin\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}e_3$$

et

$$y^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}e_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}e_3.$$

Ainsi, l'application

$$\rho_y(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}e_3\right)\boldsymbol{x}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}e_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}e_3\right)$$

représente cette rotation.

Exemple 2.32. Soit la rotation définie par l'application

$$\rho_y(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{14}e_1 - \frac{\sqrt{7}}{7}e_2 - \frac{3\sqrt{7}}{14}e_3\right)\boldsymbol{x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{14}e_1 + \frac{\sqrt{7}}{7}e_2 + \frac{3\sqrt{7}}{14}e_3\right).$$

Nous avons

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{14}e_1 - \frac{\sqrt{7}}{7}e_2 - \frac{3\sqrt{7}}{14}e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{14}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$$

avec $|y| = 1$. Ainsi,

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

et

$$\omega = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{14}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}(e_1 + 2e_2 + 3e_3).$$

Par conséquent, il s'agit d'une rotation de 90° dans le sens horaire autour de l'intersection des plans $z = x + y$ et $y = 2x$.

Autres transformations dans $\mathbb{R}^3$

Nous savons maintenant comment représenter une rotation dans $\mathbb{R}^3$. Toutefois, il existe encore d'autres opérations géométriques (translations, homothéties et réflexions).

Pour la translation, nous devons ajouter un vecteur $\mathbf{t}$. Ainsi, l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}+\mathbf{t}$ représente une translation selon le vecteur $\mathbf{t}$.

Pour une homothétie, nous devons multiplier par un facteur r. Ainsi, l'application $\mathbf{x} \mapsto r\mathbf{x}$ où $r \in \mathbb{R}$ est une homothétie.

Pour la réflexion par rapport à une droite d passant par l'origine, nous devons faire une rotation avec $y = \mathbf{a}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ où $\mathbf{a}$ est un vecteur directeur de la droite d. Ainsi, l'application $\mathbf{x} \mapsto \rho_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ représente une réflexion par rapport à la droite d.

Pour une réflexion par rapport à un plan Π, nous devons trouver le vecteur normal $\mathbf{n}$ du plan et la réflexion est donnée par $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}$.

Rotation dans $\mathbb{R}^4$

Pour les rotations dans $\mathbb{R}^4$ nous pourrions penser que l'application ρ_y fonctionne encore. Toutefois, le fait qu'un vecteur auquel nous appliquons ρ_y reste un vecteur suffit pour comprendre que ρ_y ne représente pas toutes les rotations dans $\mathbb{R}^4$. En effet, plusieurs rotations dans $\mathbb{R}^4$ amèneraient le vecteur à avoir une composante scalaire. L'application représentant les rotations dans $\mathbb{R}^4$ est donc différente de celle dans $\mathbb{R}^3$ et cette différence est donnée dans le théorème suivant qui nous vient de Cayley.

Théorème 2.33 (Théorème de Cayley). [8] *Les rotations de $\mathbb{H}$ sont exactement celles des applications*

$$x \mapsto axb$$

avec $|a| = |b| = 1$ et $a, b \in \mathbb{H}$.

Preuve

Voir l'annexe A. ■

Applications

Pour terminer cette section, il serait dommage de ne pas mentionner quelques applications des quaternions. En effet, les transformations géométriques que nous venons de voir sont utilisées dans différents domaines. Lorsque vient le temps de faire de la modélisation 3D, plusieurs logiciels préfèrent utiliser les quaternions plutôt que les matrices pour faire des rotations dans l'espace. ABB RobotStudio pour la robotique et Unity 3D pour la conception de jeux vidéos en sont deux exemples. En effet, au niveau de la mémoire informatique, les quaternions demandent quatre composantes, alors que les matrices (3×3) en demandent neuf et la multiplication des quaternions est plus facile que celle des matrices. De plus, les quaternions permettent d'éviter les angles d'Euler qui donnent l'orientation d'un objet en trois dimensions. Finalement, si vous avez plusieurs rotations consécutives à faire, les quaternions sont plus stables, car vous n'avez pas à normaliser à chaque fois le résultat. C'est d'ailleurs pour ces raisons que le contrôle des navettes spatiales se fait en utilisant les quaternions plutôt que les matrices.

Évidemment, les quaternions possèdent plusieurs autres applications qui ne sont pas mentionnées ici.

2.3 Biquaternions

Dans cette section, nous allons introduire une généralisation des quaternions, soit les biquaternions. Le terme biquaternions a été utilisé pour la première fois par Hamilton dans [11]. Toutefois, le même terme a aussi été utilisé pour un autre concept par Clifford [29]. Par conséquent, précisons que la définition utilisée dans ce mémoire est celle d'Hamilton. Puisqu'il y a plusieurs similitudes entre les quaternions et les biquaternions, nous ne reviendrons pas sur toutes les propriétés qui ont été vues dans la section précédente, mais nous insisterons davantage sur les différences entre les quaternions et les biquaternions.

Les biquaternions sont une généralisation des quaternions où chaque x_i est un nombre complexe plutôt qu'un nombre réel.

Définition 2.34. L'ensemble des biquaternions est noté $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ [iv] où

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \{x | x = (x_0, x_1, x_2, x_3),\ x_k \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, 2, 3\}.$$

Les coordonnées de x sont données par x_0, x_1, x_2 et x_3. De plus, si x et y sont deux

iv. Dans la littérature, nous retrouvons aussi la notation $\mathbb{B}$.

biquaternions, alors x et y sont égaux si et seulement si les coordonnées placées au même endroit sont égales : $x_k = y_k,\ k = 0, 1, 2, 3$.

De même que pour les quaternions, la notation que nous utiliserons est

$$x = \sum_{k=0}^{3} x_k e_k = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

mais avec des x_k complexes.

Les règles d'addition et de multiplication des biquaternions sont les mêmes que celles des quaternions. Évidemment, la multiplication par un scalaire λ est possible avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Théorème 2.35. [29] *Les biquaternions ne forment pas un corps.*

Preuve

Pour montrer que les biquaternions ne forment pas un corps, il suffit de montrer qu'un élément autre que 0 ne possède pas d'inverse. Or, le biquaternion $x = (1 + i) + (1 - i)e_1 + (1 + i)e_2 + (1 - i)e_3$ ne possède pas d'inverse, car $|x| = 0$ [v], même si $x \neq 0$. ■

Toutefois, les biquaternions forment un anneau, un espace vectoriel et une algèbre sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ [34].

Remarque 2.36. [34] *L'algèbre des biquaternions possède des diviseurs de zéro. Par exemple,* $(1 + ie_1)(1 - ie_1) = 0$.

Remarque 2.37. *Les nombres bicomplexes forment un sous-anneau commutatif des biquaternions.*

Comme pour les quaternions, la partie scalaire est donnée par $\mathrm{Sc}\,(x)$ et la partie vectorielle est donnée par $\mathrm{Vec}\,(x)$ ou $\boldsymbol{x}$. Pour ce qui est du conjugué, nous devons

v. Le module $|x|$ est défini un peu plus loin.

différencier le conjugué quaternionique $\overline{x} = x_0 - \boldsymbol{x}$ du conjugué complexe $x^* = a_0 - b_0 i + (a_1 - b_1 i)e_1 + (a_2 - b_2 i)e_2 + (a_3 - b_3 i)e_3$ où $x_k = a_k + b_k i$. Finalement, le module est donné par $|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.38. *Pour les quaternions, le module était aussi une norme. Toutefois, dans les biquaternions, ce n'est plus le cas. Notons aussi que pour la racine carrée, puisque nous sommes dans $\mathbb{C}$, nous devons faire un choix être les deux valeurs possibles.*

Un biquaternion x peut aussi être décomposé en une partie réelle et une partie imaginaire. Ainsi, $x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x)$ où $\mathrm{Re}(x) = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Re}(x_k)e_k$ et $\mathrm{Im}(x) = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Im}(x_k)e_k$. Avec cette notation, le conjugué quaternionique est donnée par $\overline{x} = \overline{\mathrm{Re}(x)} + i\overline{\mathrm{Im}(x)}$ et le conjugué complexe est donnée par $x^* = \mathrm{Re}(x) - i\,\mathrm{Im}(x)$ [34].

Voyons maintenant ce qui advient du théorème 2.9 dans les biquaternions.

Théorème 2.39. [29] *Soit $x, y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ alors :*

1. $\mathrm{Sc}(x) = \frac{x+\overline{x}}{2}$,
2. $\boldsymbol{x} = \frac{x-\overline{x}}{2}$,
3. $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$,
4. $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$,
5. $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$,
6. $\overline{\overline{x}} = x$,
7. $\overline{x^*} = \overline{x}^*$,
8. $(xy)^* = x^*y^*$.

Remarque 2.40. *Les propriétés 4 et 10 du théorème 2.9 ne sont pas valides dans les biquaternions, car certains éléments n'ont pas d'inverses et les propriétés 8 et 9 du théorème 2.9 ne sont pas valides dans les biquaternions, car $|x|$ est un nombre complexe.*

Remarque 2.41. [29] *L'unité imaginaire i commute avec les e_k, mais en général, $xx^* \neq x^*x$. En effet, il y a égalité uniquement si $\mathrm{Re}(x)\,\mathrm{Im}(x) = \mathrm{Im}(x)\,\mathrm{Re}(x)$.*

De plus, comme pour les quaternions, le théorème 2.10 possède un équivalent dans les biquaternions. Ainsi, nous trouvons par exemple que $\mathrm{Re}(x_0) = \frac{1}{8}(x + x^* - e_1 x e_1 - e_1 x^* e_1 - e_2 x e_2 - e_2 x^* e_2 - e_3 x e_3 - e_3 x^* e_3)$ et le même processus peut être appliqué pour trouver les huit composantes qui forment un biquaternion.

Évidemment, le théorème 2.11 ne possède pas d'équivalence dans les biquaternions, car le module n'est pas une norme. Afin d'avoir une norme, il est possible d'utiliser un autre module :

$$||x||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})} := \sqrt{|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2} \tag{2.3}$$

où $|x_k|$ est la norme usuelle dans $\mathbb{C}$.

Nous remarquons d'abord que $||x||^2_{\mathbb{H}(\mathbb{C})} = |\mathrm{Re}(x)|^2 + |\mathrm{Im}(x)|^2$ et que ce nouveau module définit bien une norme euclidienne. Toutefois, $||xy||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})} \neq ||x||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}||y||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}$ et $||xy||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}$ peut même être plus grand que $||x||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}||y||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}$. En fait, nous avons $||xy||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})} \leq \sqrt{2}||x||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}||y||_{\mathbb{H}(\mathbb{C})}$ [18].

Pour éviter ce problème, il est possible de définir une semi-norme [vi] qui est la valeur absolue du module, c.-à-d.

$$||x|| := \left|\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right|. \tag{2.4}$$

Dans ce cas, nous avons bien $||xy|| = ||x||\,||y||$ [29].

Finalement, nous pouvons aussi définir un produit intérieur [29] (produit scalaire) sur les biquaternions. Par convention, la notation utilisée pour le produit intérieur de deux biquaternions est la suivante :

$$\langle x, y\rangle = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}). \tag{2.5}$$

vi. Une semi-norme respecte toutes les propriétés de la norme sauf celle de s'annuler à l'origine.

Évidemment, le résultat est un nombre complexe et le fait que le produit intérieur donne 0 ne signifie pas nécessairement l'orthogonalité. En effet, la géométrie des biquaternions n'est pas aussi facile à interpréter que celle des quaternions. De la même manière, nous définissons aussi le produit extérieur [29] entre deux biquaternions x et y par

$$x \wedge y = \frac{1}{2}(xy - yx). \tag{2.6}$$

2.4 Dérivée quaternionique et biquaternionique

Dans cette section, nous allons tenter de généraliser les fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}$ et nous allons donner les principaux opérateurs utilisés dans $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Ces opérateurs nous seront très utiles dans la section suivante pour généraliser l'équation Riccati dans les biquaternions.

2.4.1 Généralisation des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}$

Puisque nous voulons travailler avec des fonctions quaternioniques, il serait intéressant de définir la notion de dérivée quaternionique et celle de fonctions analytiques ou holomorphes dans $\mathbb{H}$.

Pour généraliser les fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}$, nous pouvons essayer d'utiliser la même approche que dans $\mathbb{C}$. Pour ce faire, nous devons d'abord rappeler quelques notions d'analyse complexe.

Définition 2.42. Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si la limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est appelée la dérivée de f en z_0 et elle est notée $f'(z_0)$.

Définition 2.43. Une fonction $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur un ensemble ouvert D si elle est différentiable partout dans D.

Théorème 2.44. [5] *Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *f est différentiable partout sur D.*
2. *$\forall a \in D$, f peut être représentée par une série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.*
3. *$f \in C^1(D)$ et f est une solution aux équations de Cauchy-Riemann, c.-à-d.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Pour généraliser le concept de fonctions holomorphes aux quaternions, nous pouvons essayer de généraliser une de ces trois équivalences en considérant une fonction $f : G \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$.

Si nous tentons de généraliser la première équivalence, c.-à-d. qu'une fonction quaternionique est différentiable en $x' \in \mathbb{H}$ si

$$\lim_{x \to x'} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \tag{2.7}$$

existe, alors la fonction doit absolument être linéaire, c.-à-d. $f(x) = a + bx$ où $x, a, b \in \mathbb{H}$. La preuve de ce résultat est donnée dans [32] et dans [8].

Si nous tentons de généraliser la deuxième équivalence, nous avons que seules les fonctions complexes sont holomorphes. Les raisons sont données dans [32], mais nous ne les aborderons pas ici.

Finalement, la généralisation de la troisième équivalence avec $f \in C^1(G)$ nous donne les équations de Cauchy-Fueter [vii] :

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \tag{2.8}$$

Les fonctions qui respectent les équations de Cauchy-Fueter sont appelées régulières [32] ou holomorphes [8]. Beaucoup d'éléments des fonctions holomorphes dans les complexes peuvent être généralisés dans les quaternions avec les fonctions régulières. Toutefois, même la fonction identité $f(x) = x$ n'est pas régulière et par conséquent, toutes les fonctions polynomiales ne sont pas régulières. Encore une fois, pour plus de détails sur la théorie des fonctions régulières, nous pouvons nous référer à [32] et une approche plus théorique des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}$ est donnée dans [8].

2.4.2 Opérateurs dans $\mathbb{H}(\mathbb{C})$

Lorsque nous travaillons dans $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, plusieurs opérateurs sont nécessaires. Nous allons donc définir le gradient, la divergence, le rotationnel, le Laplacien, l'opérateur de Dirac, et quelques autres opérateurs. Pour chacun de ces opérateurs, un exemple algébrique sera donné immédiatement après la définition.

Définition 2.45. Le gradient d'une fonction $f : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$ est donné par

$$\mathbf{grad}\, f := \sum_{k=1}^{3} e_k \partial_{x_k} f.$$

Exemple 2.46. Soit $f(\boldsymbol{x}) = e^{x_1} + 3x_2x_3^2 - x_2 \sin x_1x_3$, alors

$$\mathbf{grad}\, f = (e^{x_1} - x_2x_3 \cos x_1x_3)e_1 + (3x_3^2 - \sin x_1x_3)e_2 + (6x_2x_3 - x_1x_2 \cos x_1x_3)e_3.$$

Définition 2.47. La divergence d'une fonction $\boldsymbol{u} : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, où

vii. Puisque les quaternions ne sont pas commutatifs, il s'agit plutôt des équations de Cauchy-Fueter à gauche. Évidemment, la théorie développée par celles à droite est équivalente.

$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{3} u_k e_k$ avec $u_k : \operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$, est donnée par

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} := \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} u_k.$$

Exemple 2.48. Soit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (e^{x_1} - x_2 x_3 \cos x_1 x_3)e_1 + (3x_3^2 - \sin x_1 x_3)e_2 + (6x_2 x_3 - x_1 x_2 \cos x_1 x_3)e_3$, alors

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = e^{x_1} + 6x_2 + x_2(x_1^2 + x_3^2) \sin x_1 x_3.$$

Définition 2.49. Le rotationnel d'une fonction $\boldsymbol{u} : \operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, où $\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{3} u_k e_k$ avec $u_k : \operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$, est donné par

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2)e_1 + (\partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3)e_2 + (\partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1)e_3.$$

Exemple 2.50. Soit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (e^{x_1} + x_2 x_3^2)e_1 + (3x_3^2 + \sin x_1 x_2)e_2 + (x_1 x_2 x_3)e_3$, alors

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} = (x_1 x_3 - 6x_3)e_1 + (x_2 x_3)e_2 + (x_2 \cos x_1 x_2 - x_3^2)e_3.$$

Définition 2.51. Le Laplacien d'une fonction $f : \operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$ est donné par

$$\Delta f := \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k}^2 f.$$

Exemple 2.52. Soit $f(\boldsymbol{x}) = e^{x_1} + 3x_2 x_3^2 - x_2 \sin x_1 x_3$, alors

$$\Delta f = e^{x_1} + 6x_2 + x_2(x_1^2 + x_3^2) \sin x_1 x_3.$$

Voyons maintenant un théorème qui unit les différents opérateurs mentionnés précédemment.

Théorème 2.53. [18] *Pour toutes fonctions* $f : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$ *et* $\boldsymbol{u} : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, *nous avons*

1. $\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{grad}\, f) = \mathbf{0}$,
2. $div(\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{u}) = 0$,
3. $div(\boldsymbol{grad}\, f) = \Delta f$.

La prochaine définition est très importante, car elle concerne l'opérateur différentiel que nous utiliserons pour généraliser l'équation de Riccati dans les biquaternions.

Définition 2.54. L'opérateur de Dirac D (aussi appelé opérateur de Moisil-Theodoresco) appliqué à une fonction $\varphi : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ est défini par

$$D\varphi := \sum_{k=1}^{3} e_k \partial_{x_k} \varphi.$$

Exemple 2.55. Soit $\varphi(x) = x_3 + e^{x_1}e_1 + (\sin x_3)e_2 + (x_1x_2x_3)e_3$, alors

$$D\varphi = -x_1x_2 - e^{x_1} + (x_1x_3 - \cos x_3)e_1 - x_2x_3e_2 + e_3.$$

Nous avons maintenant un théorème qui relie l'opérateur de Dirac aux autres opérateurs définis précédemment.

Théorème 2.56. [18] *Soit une fonction* $\varphi : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *où* $\varphi = \varphi_0 + \boldsymbol{\varphi}$ *avec* $\varphi_0 : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Sc}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *et* $\boldsymbol{\varphi} : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, *alors*

1. $D\varphi = -div\,\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{grad}\,\varphi_0 + \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{\varphi}$,
2. $D^2\varphi = -\Delta\varphi$.

Preuve

1. $D\varphi = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{grad}\,\varphi_0 + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}$:

   Soit une fonction $\varphi : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ où $\varphi = \sum_{k=0}^{3} \varphi_k e_k$ avec $\varphi_k : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} D\varphi &= (e_1\partial_{x_1} + e_2\partial_{x_2} + e_3\partial_{x_3})(\varphi_0 + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3) \\ &= -(\partial_{x_1}\varphi_1 + \partial_{x_2}\varphi_2 + \partial_{x_3}\varphi_3) + (e_1\partial_{x_1}\varphi_0 + e_2\partial_{x_2}\varphi_0 + e_3\partial_{x_3}\varphi_0) \\ &\quad + ((\partial_{x_2}\varphi_3 - \partial_{x_3}\varphi_2)e_1 + (\partial_{x_3}\varphi_1 - \partial_{x_1}\varphi_3)e_2 + (\partial_{x_1}\varphi_2 - \partial_{x_2}\varphi_1)e_3) \\ &= -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{grad}\,\varphi_0 + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}$$

2. $D^2\varphi = -\Delta\varphi$:

$$\begin{aligned} D^2 &= \sum_{k=1}^{3} e_k\partial_{x_k}\left(\sum_{k=1}^{3} e_k\partial_{x_k}\right) \\ &= -\partial_{x_1}^2 + e_3\partial_{x_1}\partial_{x_2} - e_2\partial_{x_1}\partial_{x_3} - e_3\partial_{x_2}\partial_{x_1} - \partial_{x_2}^2 + e_1\partial_{x_2}\partial_{x_3} \\ &\quad + e_2\partial_{x_3}\partial_{x_1} - e_1\partial_{x_3}\partial_{x_2} - \partial_{x_3}^2 \\ &= -\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2 \\ &= -\Delta. \end{aligned}$$

■

Directement de la première propriété du théorème précédent, nous obtenons le corollaire qui suit, qui s'appelle aussi le système de Moisil-Theodoresco.

Corollaire 2.57. [18] *Soit une fonction* $\varphi : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *où* $\varphi = \varphi_0 + \boldsymbol{\varphi}$ *avec* $\varphi_0 : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Sc}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *et* $\boldsymbol{\varphi} : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, *alors*

$$D\varphi = 0 \Leftrightarrow div\,\boldsymbol{\varphi} = 0 \ \ et\ \ \boldsymbol{grad}\,\varphi_0 = -\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{\varphi}.$$

Nous savons que les dérivées dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ respectent la règle de Leibniz (ou règle du produit). Toutefois, l'opérateur de Dirac ne possède pas directement cette propriété. Nous avons donc une généralisation de la règle de Leibniz.

Théorème 2.58 (Règle de Leibniz généralisée). [9] *Soit* φ *et* ψ *des fonctions allant de* $\operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *vers* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$*, alors*

$$D(\varphi\psi) = D(\varphi)\psi + \overline{\varphi}D(\psi) - 2\sum_{k=1}^{3} \varphi_k \partial_{x_k} \psi.$$

Preuve

La preuve est calculatoire, mais assez longue. Par conséquent, elle est donnée à la fin de l'annexe A. ■

Une conséquence du théorème 2.58 est que $D(\varphi) = 0$ et $D(\psi) = 0$ n'impliquent pas nécessairement que $D(\varphi\psi) = 0$. En effet, si nous prenons $\varphi = x_1e_2 + x_2e_1$ et $\psi = x_1e_1 - x_2e_2$, alors $D(\varphi) = 0$, $D(\psi) = 0$ et $D(\varphi\psi) = -2(x_2e_1 - x_1e_2) \neq 0$. De plus, si $\operatorname{Vec}\varphi = \mathbf{0}$, alors nous retrouvons la règle de Leibniz habituelle.

Nous terminons maintenant cette section avec d'autres opérateurs qui peuvent être utiles et pour lesquels nous donnons seulement la définition.

Définition 2.59. L'opérateur M^x représente la multiplication à droite du biquaternion x. Ainsi, $M^x y := yx, \quad \forall y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Définition 2.60. L'opérateur C_H donne le conjugué quaternionique. Ainsi, $C_H x := \overline{x}, \quad \forall x \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Définition 2.61. L'opérateur de Dirac à droite D_r appliqué à une fonction $\varphi : \operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ est définit par

$$D_r\varphi := \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \varphi e_k.$$

Remarque 2.62. *Les résultats obtenus précédemment avec D sont similaires avec D_r. Par exemple, pour $\varphi : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ où $\varphi = \varphi_0 + \boldsymbol{\varphi}$ avec $\varphi_0 : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Sc}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ et $\boldsymbol{\varphi} : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, $D_r\varphi = -div\,\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{grad}\,\varphi_0 - \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{\varphi}$.*

Le théorème qui suit fait d'ailleurs le lien entre l'opérateur de Dirac D et l'opérateur de Dirac à droite D_r.

Théorème 2.63. [18] *Soit une fonction $\varphi : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, alors*

$$C_H(D\varphi) = D_r\varphi.$$

Preuve

Soit une fonction $\varphi = \varphi_0 + \boldsymbol{\varphi}$ avec $\varphi_0 : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Sc}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ et $\boldsymbol{\varphi} : \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C})) \to \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, alors

$$\begin{aligned} C_H(D\varphi) &= C_H(-\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{grad}\,\varphi_0 + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}) \\ &= -\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{grad}\,\varphi_0 - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi} \\ &= D_r\varphi. \end{aligned}$$

■

Avant de conclure cette section, nous devons voir un dernier opérateur. De plus, pour le reste du chapitre, Ω sera un sous-domaine de $\mathbb{R}^3$ et les points de Ω seront notés $\boldsymbol{x}$ ou encore (x, y, z).

Définition 2.64. Soit la fonction $\boldsymbol{\psi} : \Omega \to \mathrm{Vec}\,(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ où $\boldsymbol{\psi} = \sum_{k=1}^{3} \psi_k e_k$ avec $\psi_k : \Omega \to \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{A}[\boldsymbol{\varphi}](x, y, z) := \int_{x_0}^{x} \psi_1(\xi, y_0, z_0)\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} \psi_2(x, \eta, z_0)\mathrm{d}\eta + \int_{z_0}^{z} \psi_3(x, y, \zeta)\mathrm{d}\zeta + C$$

où (x_0, y_0, z_0) est un point arbitraire de Ω et $C \in \mathbb{C}$ est une constante.

En fait, comme montré dans [20], cette définition vient du fait que si nous avons l'équation différentielle

$$\mathbf{grad}\, \varphi = \boldsymbol{\psi} \tag{2.9}$$

avec $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ qui est la condition de compatibilité, alors $\varphi = \mathcal{A}[\boldsymbol{\varphi}](x, y, z)$. Ici, $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ est la fonction inconnue et $\boldsymbol{\psi}$, qui est définie de la même façon que dans la définition précédente, est une fonction connue.

2.5 Équation de Riccati biquaternionique

Dans cette section, dont les résultats ont été publiés dans [26], nous allons généraliser l'équation de Riccati (1.2) dans les biquaternions. En fait, comme au chapitre 1 pour le cas complexe, nous allons plutôt généraliser la forme canonique (1.11) pour garder le lien avec l'équation de Schrödinger stationnaire tridimensionnel. Ce lien sera développé immédiatement après et nous terminerons le chapitre en généralisant dans les biquaternions une partie des résultats obtenus au chapitre 1 pour l'équation de Riccati.

2.5.1 Généralisation de l'équation de Riccati dans les biquaternions

L'équation que nous voulons généraliser est l'équation de Riccati canonique (1.11). Celle-ci peut être généralisée dans les biquaternions par

$$D\boldsymbol{Q} + |\boldsymbol{Q}|^2 = q(x, y, z) \tag{2.10}$$

où $\boldsymbol{Q} : \Omega \to \mathrm{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$, $q : \Omega \to \mathbb{C}$ et D est l'opérateur de Dirac défini dans la section 2.4. Comme mentionnée précédemment, l'idée de cette généralisation est de préserver le lien avec l'équation de Schrödinger. Cette généralisation a d'ailleurs été traitée, entre autres, dans [17, 18, 19].

Il faut savoir que l'équation (2.10) peut se ramener à un système de quatre équations complexes. En effet, en utilisant le théorème 2.56, nous avons $D\boldsymbol{Q} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{Q} - \mathrm{div}\,\boldsymbol{Q}$. Ainsi, en prenant $\boldsymbol{Q} = u(x,y,z)e_1 + v(x,y,z)e_2 + w(x,y,z)e_3$ où u, v, w sont des fonctions qui vont de Ω vers $\mathbb{C}$, l'équation (2.10) est équivalente au système d'équations complexes suivant [viii] :

$$-(u_x + v_y + w_z) + u^2 + v^2 + w^2 - q = 0, \tag{2.11a}$$

$$w_y - v_z = 0, \tag{2.11b}$$

$$u_z - w_x = 0, \tag{2.11c}$$

$$v_x - u_y = 0. \tag{2.11d}$$

2.5.2 Équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger stationnaire en trois dimensions est donnée par

$$-\Delta\psi + q(x,y,z)\psi = 0 \tag{2.12}$$

où ψ (inconnue) et q (connue) sont deux fonctions qui vont de Ω vers $\mathbb{C}$.

Théorème 2.65. [17] *La fonction $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ est une solution de l'équation de Schrödinger* (2.12) *si et seulement si $\boldsymbol{Q} = \dfrac{-D\psi}{\psi}$ est une solution de l'équation de Riccati* (2.10).

viii. Par souci de légèreté, la notation $u_x := \dfrac{\partial u}{\partial x}, \cdots, w_z := \dfrac{\partial w}{\partial z}$ est utilisée.

Preuve

Soit $\boldsymbol{Q} = \dfrac{-D\psi}{\psi}$ une solution de l'équation (2.10). En appliquant la règle de Leibniz (voir théorème 2.58), nous avons

$$D\boldsymbol{Q} = \frac{-D^2\psi}{\psi} + \frac{D\psi D\psi}{\psi^2} = \frac{\Delta\psi}{\psi} + \left(\frac{D\psi}{\psi}\right)^2. \tag{2.13}$$

De plus, du théorème 2.16 (3), nous avons

$$|\boldsymbol{Q}|^2 = -\boldsymbol{Q}^2 = -\left(\frac{D\psi}{\psi}\right)^2. \tag{2.14}$$

Ainsi, $\dfrac{\Delta\psi}{\psi} = q$, ou encore $-\Delta\psi + q\psi = 0$.

À l'inverse, si $-\Delta\psi + q\psi = 0$, alors en utilisant les équivalences (2.13) et (2.14), $\boldsymbol{Q} = \dfrac{-D\psi}{\psi}$ est une solution de l'équation (2.10). ■

Théorème 2.66. [26] *La fonction* $\boldsymbol{Q} : \Omega \to \operatorname{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *est une solution de l'équation de Riccati* (2.10) *si et seulement si* $\psi = \exp(-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}])$ *est une solution de l'équation de Schrödinger* (2.12).

Preuve

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} D^2 e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} &= -D\left(D(\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}])e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]}\right) = -D\left(\boldsymbol{Q}e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]}\right) \\ &= e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]}\left(-D\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2\right) = -e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]}\left(D\boldsymbol{Q} + |\boldsymbol{Q}|^2\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

et que

$$(-\Delta + q)e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} = (D^2 + q)e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]}. \tag{2.16}$$

Ainsi, $\boldsymbol{Q}$ est une solution de l'équation (2.10) si et seulement si

$$\begin{aligned} & D\boldsymbol{Q} + |\boldsymbol{Q}|^2 = q \\ \Leftrightarrow\ & \left(D\boldsymbol{Q} + |\boldsymbol{Q}|^2\right) e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} = qe^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} \\ \Leftrightarrow\ & D^2 e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} = -qe^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} \\ \Leftrightarrow\ & -\Delta e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} + qe^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]} = 0 \end{aligned}$$

si et seulement si $\psi = \exp\left(-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]\right)$ est une solution de l'équation (2.12). ∎

Finalement, comme pour le cas réel, l'opérateur de Schrödinger $(-\Delta + q(x, y, z))$ peut être factorisé par

$$-\Delta + q(x, y, z) = (D + M^{\boldsymbol{Q}})(D - \boldsymbol{Q}C_H) \tag{2.17}$$

si et seulement si $\boldsymbol{Q}$ est une solution de l'équation de Riccati (2.10) [2, 3].

Ces trois liens avec l'équation de Schrödinger suggèrent que l'équation (2.10) est une bonne généralisation de l'équation de Riccati dans les biquaternions.

2.5.3 Généralisation des résultats du chapitre 1

Pour généraliser les résultats obtenus au chapitre 1 sur l'équation de Riccati, nous avons besoin de trois résultats préliminaires qui seront donnés ici sans démonstration. De plus, dans ce qui va suivre, $W = W_0 + \boldsymbol{W}$ est une fonction qui va de Ω vers $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ où $W_0 : \Omega \to \mathrm{Sc}\left(\mathbb{H}(\mathbb{C})\right)$ et $\boldsymbol{W} : \Omega \to \mathrm{Vec}\left(\mathbb{H}(\mathbb{C})\right)$.

Théorème 2.67. [20] *Soit ψ une solution non nulle de l'équation de Schrödinger (2.12). Si $W = W_0 + \boldsymbol{W}$ est une solution de l'équation biquaternionique*

$$DW - \frac{D\psi}{\psi} C_H W = 0, \tag{2.18}$$

alors W_0 est aussi une solution de l'équation de Schrödinger (2.12). De plus, les composantes de W respectent les deux équations suivantes :

$$div \left[\psi^2 \boldsymbol{grad} \left(\frac{W_0}{\psi} \right) \right] = 0, \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{rot} \left[\psi^{-2} \boldsymbol{rot}(\psi \boldsymbol{W}) \right] = \boldsymbol{0}. \tag{2.20}$$

De ce résultat, en utilisant le théorème 2.65, nous avons aussi que $\boldsymbol{Q} = \dfrac{-DW_0}{W_0}$ est une solution de l'équation de Riccati (2.10).

Définition 2.68. Soit une fonction $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ purement vectorielle pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$, alors

$$\boldsymbol{B}[\boldsymbol{F}](\boldsymbol{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \mathrm{d}\Omega.$$

Théorème 2.69. [26] *Soit ψ une solution non nulle de l'équation de Schrödinger (2.12). Si la fonction $\boldsymbol{w} : \Omega \to \mathrm{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ est une solution purement vectorielle de l'équation*

$$D\boldsymbol{w} + M^{\frac{D\psi}{\psi}} \boldsymbol{w} = 0, \tag{2.21}$$

alors une solution de l'équation (2.18) est donnée par

$$W = \frac{1}{2} \left(\psi \mathcal{A} \left[\frac{\boldsymbol{w}}{\psi} \right] - \psi^{-1} \boldsymbol{rot} \left(\boldsymbol{B}[\psi \boldsymbol{w}] \right) + \frac{\boldsymbol{grad}\, h}{\psi} \right) \tag{2.22}$$

où h est une fonction harmonique arbitraire dans Ω. De plus, une solution de l'équation de Schrödinger (2.12) est donnée par $W_0 = \dfrac{1}{2} \psi \mathcal{A} \left[\dfrac{\boldsymbol{w}}{\psi} \right]$ et une solution de l'équation de Riccati (2.10) est donnée par $\boldsymbol{Q} = -\psi^{-1} \left(\boldsymbol{grad}\, \psi + \dfrac{\boldsymbol{w}}{\mathcal{A}\left[\frac{\boldsymbol{w}}{\psi}\right]} \right)$.

Théorème 2.70. [20] *Soit W_0 une solution de l'équation de Schrödinger* (2.12) *avec* $q = \dfrac{\Delta\psi}{\psi}$. *La fonction $W = W_0 + \boldsymbol{W}$, où W est une solution de l'équation* (2.18) *et où $\boldsymbol{W}$ satisfait l'équation* (2.20), *est construite en posant*

$$\boldsymbol{W} = -\psi^{-1}\left(\boldsymbol{rot}\left(\boldsymbol{B}\left[\psi^2\boldsymbol{grad}\left(\frac{W_0}{\psi}\right)\right]\right) + \boldsymbol{grad}\,h\right) \tag{2.23}$$

où h est une fonction harmonique arbitraire.

À l'inverse, si nous connaissons $\boldsymbol{W}$ plutôt que W_0, alors

$$W_0 = -\psi\mathcal{A}\left[\psi^{-2}\boldsymbol{rot}\,(\psi\boldsymbol{W})\right]. \tag{2.24}$$

Avec ces différents résultats, nous pouvons maintenant généraliser le premier théorème d'Euler et le théorème de Weyr et Picard.

Théorème 2.71. [26] *Soit $\boldsymbol{Q}_1$ une solution particulière de l'équation de Riccati* (2.10), *alors l'équation de Riccati se réduit à l'équation de premier ordre*

$$DW = -\boldsymbol{Q}_1\overline{W}. \tag{2.25}$$

En d'autres mots, cela signifie que n'importe quelle solution de l'équation de Riccati (2.10) *a la forme suivante :*

$$\boldsymbol{Q} = \frac{-DW_0}{W_0} \tag{2.26}$$

et à l'inverse, n'importe quelle solution de l'équation (2.25) *peut être exprimée, en fonction de la solution $\boldsymbol{Q}$ correspondante de l'équation* (2.10), *par*

$$W = e^{-\mathcal{A}[Q]} - e^{\mathcal{A}[Q_1]}\left(\boldsymbol{rot}\left(\boldsymbol{B}\left[e^{-2\mathcal{A}[Q_1]}\boldsymbol{grad}\left(e^{-\mathcal{A}[Q-Q_1]}\right)\right]\right) + \boldsymbol{grad}\,h\right) \tag{2.27}$$

où h est une fonction harmonique arbitraire.

Preuve

Soit $\boldsymbol{Q}_1$ une solution de l'équation de Riccati (2.10). En utilisant les théorèmes 2.65 et 2.66, nous avons $\frac{D\psi}{\psi} = -\boldsymbol{Q}_1$ où ψ est une solution non nulle de l'équation de Schrödinger (2.12) avec $q = \frac{\Delta\psi}{\psi}$. Ainsi, l'équation (2.25) est équivalente à l'équation (2.18). De la même manière, $\boldsymbol{Q} = \frac{-D\varphi}{\varphi}$ où φ est une solution de l'équation de Schrödinger (2.12). Par conséquent, en utilisant le théorème 2.70, $\varphi = W_0$ et la première partie du théorème est démontrée.

Supposons maintenant que $W = W_0 + \boldsymbol{W}$ est une solution de l'équation (2.25). Encore une fois, nous avons $\frac{D\psi}{\psi} = -\boldsymbol{Q}_1$ et d'après le théorème 2.67, W_0 est une solution de l'équation de Schrödinger (2.12) avec $q = \frac{\Delta\psi}{\psi}$. De plus, en utilisant le théorème 2.65, $\boldsymbol{Q} = \frac{-DW_0}{W_0}$ est une solution de l'équation de Riccati (2.10). Par conséquent, en utilisant le théorème 2.70, nous avons

$$W = W_0 - \psi^{-1}\left(\textbf{rot}\left(\boldsymbol{B}\left[\psi^2\textbf{grad}\left(\frac{W_0}{\psi}\right)\right]\right) + \textbf{grad}\, h\right). \tag{2.28}$$

Du théorème 2.66, il suffit maintenant de faire les substitutions $\psi = e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}_1]}$ et $W_0 = e^{-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]}$ pour obtenir l'équation (2.27) . ■

Théorème 2.72. [26] *Soit $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_3$ et $\boldsymbol{Q}_4$ quatre solutions particulières de l'équation de Riccati* (2.10)*, alors*

$$\begin{aligned} &\frac{D(\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2) - 2(\boldsymbol{Q}_1 \times \boldsymbol{Q}_2)}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2} + \frac{D(\boldsymbol{Q}_3 - \boldsymbol{Q}_4) - 2(\boldsymbol{Q}_3 \times \boldsymbol{Q}_4)}{\boldsymbol{Q}_3 - \boldsymbol{Q}_4} \\ -&\frac{D(\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_4) - 2(\boldsymbol{Q}_1 \times \boldsymbol{Q}_4)}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_4} - \frac{D(\boldsymbol{Q}_3 - \boldsymbol{Q}_2) - 2(\boldsymbol{Q}_3 \times \boldsymbol{Q}_2)}{\boldsymbol{Q}_3 - \boldsymbol{Q}_2} = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Preuve

La preuve est algébrique. En effet, en commençant avec l'équation triviale

$$C_H\left[-(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2) - (\boldsymbol{Q}_3 + \boldsymbol{Q}_4) + (\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_4) + (\boldsymbol{Q}_3 + \boldsymbol{Q}_2)\right] = \boldsymbol{0}, \tag{2.30}$$

nous pouvons développer chacun des termes pour obtenir l'équation (2.29). Voyons en exemple le premier terme :

$$\begin{aligned}
C_H(-(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)) &= \frac{(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)(\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2)}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2} \\
&= \frac{\boldsymbol{Q}_1^2 - \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2^2}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2} \\
&= \frac{-|\boldsymbol{Q}_1|^2 + |\boldsymbol{Q}_2|^2 - \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2} \\
&= \frac{(q - |\boldsymbol{Q}_1|^2) - (q - |\boldsymbol{Q}_2|^2) - \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2} \\
&= \frac{D\boldsymbol{Q}_1 - D\boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2} \\
&= \frac{D(\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2) - 2(\boldsymbol{Q}_1 \times \boldsymbol{Q}_2)}{\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2}.
\end{aligned}$$

En faisant des calculs similaires pour les trois autres termes, nous obtenons l'équation (2.29). ■

Dans la dernière preuve, nous avons vu que la présence du produit vectoriel dans le résultat est une conséquence de la non-commutativité des biquaternions. Il s'agit de la seule différence avec l'équation (1.8) obtenue au chapitre 1.

Chapitre 3

Les symétries

Dans ce chapitre, nous aborderons les symétries des équations différentielles. Pour ce faire, nous commencerons par introduire les symétries. Puis, nous traiterons de la théorie qui entoure les groupes de symétries. Enfin, nous trouverons les groupes de symétries de quelques équations importantes (Burger, Euler et Riccati).

3.1 Introduction

Lorsque nous parlons de symétries, les premières images qui nous viennent en tête sont généralement des réflexions géométriques. Toutefois, en mathématique, le mot symétrie désigne beaucoup plus que ça. En effet, une symétrie est une transformation qui laisse un objet invariant.

Définition 3.1. [14] Une transformation est une symétrie si elle respecte les 3 conditions suivantes :

1. La transformation préserve la structure ;

2. La transformation est un difféomorphisme [i] ;

3. La transformation envoie l'objet sur lui-même.

Exemple 3.2. Dans un triangle équilatéral, les rotations de $\frac{2k\pi}{3}$ rad où $k \in \mathbb{Z}$, les réflexions passant par le centre et chacun des sommets et toutes les translations sont des symétries.

Même s'il est parfois utile de travailler avec des symétries discrètes comme les réflexions, nous allons nous concentrer uniquement sur les symétries continues à un paramètre.

Exemple 3.3. [14] Dans le cercle unitaire $x^2 + y^2 = 1$, la transformation

$$\Gamma_\theta : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

représente une rotation de θ degrés par rapport au centre du cercle. Cette transformation respecte les 3 propriétés de 3.1. De plus, la transformation dépend d'un seul paramètre θ qui varie continûment. Par conséquent, la transformation Γ_θ est une symétrie continue à un paramètre.

Dans l'exemple précédant, la transformation Γ_θ est un groupe de Lie à un paramètre, car elle respecte la définition suivante.

Définition 3.4. [14] Soit un objet dans $\mathbb{R}^n$ qui possède un ensemble infini de symétries

$$\Gamma_\varepsilon : x_s \mapsto \hat{x}_s(x_1, \ldots, x_n, \varepsilon), \quad s = 1, \ldots, n,$$

où ε est un paramètre réel. Si

1. Γ_0 est la symétrie triviale, c.-à-d. $\hat{x}_s = x_s$ quand $\varepsilon = 0$;

i. Un difféomorphisme est une application bijective où l'application et son inverse sont différentiables.

2. Γ_ε est une symétrie pour tout ε dans un voisinage de 0 ;

3. $\Gamma_\delta\Gamma_\varepsilon = \Gamma_{\delta+\varepsilon}$ pour tout δ et pour tout ε suffisamment proches de 0 ;

4. chaque $\hat{x}_s$ peut être représenté par une série de Taylor en ε, c.-à-d.

$$\hat{x}_s(x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = x_s + \varepsilon\xi_s(x_1, \ldots, x_n) + O(\varepsilon^2), \quad s = 1, \ldots, n;$$

alors l'ensemble des symétries Γ_ε est un groupe local de Lie à un paramètre.

La théorie des groupes de Lie sera d'ailleurs développée dans la prochaine section, car elle sera nécessaire pour traiter les symétries des équations différentielles.

En effet, maintenant que les symétries des objets géométriques sont bien définies, nous pouvons aborder celles des équations différentielles. Nous avons vu qu'une symétrie est une transformation qui laisse un objet invariant. Ainsi, pour une équation différentielle, nous dirons d'une transformation qu'elle est une symétrie si une solution avant la transformation est encore une solution après la transformation.

Exemple 3.5. Soit l'équation de la chaleur $u_t = u_{xx}$, une des symétries est donnée par

$$\Gamma_\varepsilon : (x, t, u) \mapsto (\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}) = (x + \varepsilon, t, u).$$

Ainsi, puisque $u(x, t) = x^2 + 2t$ est une solution de l'équation de la chaleur, $\hat{u} = (x + \varepsilon)^2 + 2t$ est aussi une solution de l'équation de la chaleur.

En poussant plus loin cette méthode, il est possible de trouver des solutions complexes à partir de solutions triviales.

Exemple 3.6. Dans l'exemple précédant, nous avons vu que $u(x, t) = x^2 + 2t$ est une solution de l'équation de la chaleur. Toutefois, l'équation de la chaleur a plusieurs symétries. Une de ces symétries associe une solution $u(x, t)$ à une nouvelle solution

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon t}} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon t}\right) u\left(\frac{x}{1 + 4\varepsilon t}, \frac{t}{1 + 4\varepsilon t}\right).$$

Ainsi, en appliquant cette symétrie avec $\varepsilon = 1$, nous trouvons que

$$\hat{u}(x,t) = \frac{x^2 + 2t + 8t^2}{(1+4t)^2\sqrt{1+4t}} \exp\left(\frac{-x^2}{1+4t}\right)$$

est aussi une solution de l'équation de la chaleur.

Ce dernier exemple montre bien l'utilité de connaitre les symétries d'une équation différentielle. Par conséquent, notre but dans ce chapitre sera de trouver les symétries associées à un système d'équations différentielles.

3.2 Théorie

Dans cette section, nous montrerons comment trouver le groupe de symétries d'un système d'équations différentielles. Pour y arriver, nous aurons besoin de plusieurs notions mathématiques. Ainsi, nous aborderons les groupes de Lie et les générateurs infinitésimaux, les groupes de symétries et les équations différentielles, et le calcul du groupe de symétries d'un système d'équations différentielles. Les démonstrations des théorèmes seront omises, mais pour le lecteur intéressé, la plupart des preuves sont présentées dans [24]. Cette référence est d'ailleurs celle qui est utilisée pour toute cette section. De plus, une approche moins rigoureuse est aussi présentée dans [14].

3.2.1 Groupes de Lie et générateurs infinitésimaux

Avant de discuter des systèmes d'équations différentielles, nous devons réviser plusieurs éléments théoriques. Ainsi, nous allons traiter des groupes de transformations, des champs vectoriels et des algèbres de Lie.

Groupes de transformations

Rappelons d'abord qu'un groupe est un ensemble G auquel nous avons ajouté une opération $*$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Fermeture : si $g, h \in G$, alors $g * h \in G$;

2. Associativité : si $g, h, k \in G$, alors $(g * h) * k = g * (h * k)$;

3. Élément neutre : $\exists e \in G$ tel que $\forall g \in G$, $g * e = g = e * g$;

4. Inverse : $\forall g \in G$, $\exists g^{-1} \in G$ tel que $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$.

Rappelons aussi qu'une variété de dimension n est un ensemble M qui contient une collection dénombrable de sous-ensembles $U_i \subseteq M$ et des fonctions $\chi_i : U_i \to V_i$, avec $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles ouverts connexes tel que les propriétés suivantes sont respectées :

1. $\bigcup_i U_i = M$;

2. Pour toutes les paires $U_i \cap U_j$,

$$\chi_j \circ \chi_i^{-1} : \chi_i(U_i \cap U_j) \to \chi_j(U_i \cap U_j)$$

   est une fonction lisse ;

3. Si $x_i \in U_i$ et $x_j \in U_j$ sont des points distincts de M, alors il existe des sous-ensembles ouverts $W_i \subseteq V_i$ et $W_j \subseteq V_j$ avec $\chi_i(x_i) \in W_i$, $\chi_j(x_j) \in W_j$ tel que

$$\chi_i^{-1}(W_i) \cap \chi_j^{-1}(W_j) = \emptyset.$$

Remarque 3.7. *Dans la plupart des cas, la variété utilisée sera $M = \mathbb{R}^n$. De plus, à moins d'indication contraire, les variétés utilisées seront toujours connexes.*

Maintenant, en unissant les notions de groupes et de variétés, nous obtenons les groupes de Lie.

Définition 3.8. Un groupe de Lie à r paramètres est un groupe G muni d'une structure de variété lisse de dimension r tel que l'opération du groupe

$$m : G \times G \to G, \quad m(g,h) = g * h, \quad g,h \in G$$

et l'inversion

$$i : G \to G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G$$

sont des applications lisses.

Remarque 3.9. *Comme pour les variétés, à moins d'indication contraire, les groupes de Lie sont connexes. La même remarque s'appliquera aussi aux groupes de transformations que nous verrons par la suite.*

Exemple 3.10. Soit $G = \mathbb{R}^n$ avec l'addition vectorielle, comme l'addition et l'inversion additive sont des applications lisses, G est un groupe de lie à n paramètres.

Dans le cas où nous n'avons pas besoin de tous les éléments du groupe, mais uniquement de ceux proches de l'identité 0, nous pouvons définir un groupe local de Lie sans passer par la théorie des variétés.

Définition 3.11. Un groupe local de Lie à r paramètres est un sous-ensemble ouvert connexe $V_0 \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ qui contient l'origine 0 et où les applications

$$m : V \times V \to \mathbb{R}^n$$

qui représente l'opération du groupe et

$$i : V_0 \to V$$

qui représente l'inversion sont des applications lisses qui respectent les propriétés suivantes :

1. Associativité : si $x, y, z \in V$ et que $m(x,y)$ et $m(y,z)$ sont aussi dans V, alors

$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$;

2. Élément neutre : $\forall x \in V$, $m(0, x) = x = m(x, 0)$;

3. Inverse : $\forall x \in V_0$, $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Remarque 3.12. *Le fait d'être local fait en sorte que l'élément neutre est l'origine* 0 *et que les propriétés du groupe ont seulement besoin d'être valides pour les éléments dans le voisinage de* 0.

Exemple 3.13. Soit $V = \{x : |x| < 1\} \subset \mathbb{R}$ avec

$$m(x, y) = \frac{2xy - x - y}{xy - 1}, \quad x, y \in V.$$

Un calcul rapide montre que l'opération est associative et que l'élément neutre est 0. Toutefois, puisque l'inversion $i(x) = \frac{x}{2x-1}$ est définie uniquement pour $x \in V_0 = \{-1 < x < \frac{1}{3}\}$, nous avons un groupe local de Lie à un paramètre.

En rajoutant certaines conditions sur les groupes de Lie, nous arrivons enfin aux groupes de transformations.

Définition 3.14. Soit M une variété lisse, un groupe local de transformations agissant sur M est donné par un groupe local de Lie G et un ouvert W tel que

$$\{e\} \times M \subseteq W \subseteq G \times M$$

et tel qu'une application lisse $\psi : W \to M$ respecte les propriétés suivantes :

1. Associativité : si $(h, x) \in W$, $(g, \psi(h, x)) \in W$ et que $(g * h, x) \in W$, alors

$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(g * h, x) ;$$

2. Élément neutre : $\forall x \in M$, $\psi(e, x) = x$;

3. Inverse : si $(g, x) \in W$, alors $(g^{-1}, \psi(g, x)) \in W$ et $\psi(g^{-1}, \psi(g, x)) = x$.

Remarque 3.15. *Si $W = G \times M$, nous parlerons simplement de groupe de transformations. De plus, si le groupe de Lie est $\mathbb{R}$, nous dirons qu'il s'agit du groupe de transformation à un paramètre.*

Exemple 3.16. Le groupe de translations dans $\mathbb{R}^n$ est un groupe de transformations. En effet, en prenant $M = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}$ et l'application

$$\psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

nous obtenons un groupe de transformations à un paramètre.

Champs vectoriels et générateurs infinitésimaux

Soit une courbe lisse C sur une variété M et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les points de C. Cette courbe peut être paramétrée par une fonction lisse $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ tel que

$$\varphi(\varepsilon) = (\varphi_1(\varepsilon), \ldots, \varphi_n(\varepsilon)) = (x_1, \ldots, x_n) = x. \tag{3.1}$$

De plus, à chaque point x de la courbe C, le vecteur tangent est donné par

$$\boldsymbol{v}|_x = \frac{\mathrm{d}\varphi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\varphi_n(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right). \tag{3.2}$$

Toutefois, pour éviter la confusion entre le vecteur tangent et les coordonnées de la courbe, nous noterons le vecteur tangent

$$\boldsymbol{v}|_x = \frac{\mathrm{d}\varphi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varphi_1(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\partial_{x_1} + \ldots + \frac{\mathrm{d}\varphi_n(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\partial_{x_n}. \tag{3.3}$$

Exemple 3.17. Soit l'hélice

$$\varphi(\varepsilon) = (\cos\varepsilon, \sin\varepsilon, \varepsilon)$$

dans $\mathbb{R}^3$ avec les coordonnées cartésiennes (x, y, z), alors le vecteur tangent d'un point

$\boldsymbol{x} = (x, y, z) = \varphi(\varepsilon)$ est donnée par

$$\boldsymbol{v}|_x = -\sin\varepsilon\partial_x + \cos\varepsilon\partial_y + \partial_z = -y\partial_x + x\partial_y + \partial_z.$$

Un champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ sur une variété M associe de façon lisse un vecteur tangent $\boldsymbol{v}|_x$ à chaque point $x \in M$. Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, alors le champ vectoriel a la forme

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\partial_{x_i} \tag{3.4}$$

où les fonctions $\xi_i(x)$ sont lisses.

Une courbe intégrale $\varphi(\varepsilon)$ d'un champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ est une courbe paramétrée lisse dont le vecteur tangent en n'importe quel point coïncide avec la valeur de $\boldsymbol{v}$ en ce point, c.-à-d.

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = \boldsymbol{v}|_{\varphi(\varepsilon)}. \tag{3.5}$$

Ainsi, $x = (x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\varepsilon)$ est une solution de

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi_i(x), \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.6}$$

où les $\xi_i(x)$ sont les coefficients du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ au point x.

Pour des conditions initiales fixées $\varphi(0) = x_0$, la solution de l'équation (3.6) est unique. Cela nous assure d'ailleurs l'existence et l'unicité d'une courbe intégrale maximale[ii] qui passe par x_0.

Le flot $\psi(\varepsilon, x)$ d'un champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ est donné par la courbe intégrale maximale qui passe par $x \in M$. Celui-ci a les propriétés suivantes :

1. $\forall\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}, \quad \psi(\delta, \psi(\varepsilon, x)) = \psi(\delta + \varepsilon, x), \quad x \in M$;

ii. La courbe n'est contenue dans aucune autre courbe intégrable plus longue.

2. $\psi(0,x) = x$;

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\psi(\varepsilon,x) = \boldsymbol{v}|_{\psi(\varepsilon,x)}$.

La propriété 3 signifie simplement que $\boldsymbol{v}$ est tangent à la courbe $\psi(\varepsilon,x)$ et la propriété 2 donne les conditions initiales de la courbe intégrale.

Finalement, nous remarquons que le flot généré par le champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ agit de la même façon que le groupe de transformations à un paramètre. De plus, le champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ est appelé le générateur infinitésimal, car

$$\psi(\varepsilon,x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2). \tag{3.7}$$

Ainsi, si $\psi(\varepsilon,x)$ est un groupe de transformations à un paramètre, alors son générateur infinitésimal est donné par

$$\boldsymbol{v} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon,x). \tag{3.8}$$

Exemple 3.18. Soit le groupe de translation $\psi(\varepsilon,x) = x + \varepsilon a$, alors

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon,x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} (x+\varepsilon a) = a|_{\varepsilon=0} = a.$$

Ainsi, $\boldsymbol{v} = a\partial_x$.

Exemple 3.19. Soit le groupe $\psi(\varepsilon,(x,y)) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right)$, alors

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon,(x,y)) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right) \\ &= \left.\left(\frac{x^2}{(1-\varepsilon x)^2}, \frac{xy}{(1-\varepsilon x)^2}\right)\right|_{\varepsilon=0} \\ &= (x^2, xy).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boldsymbol{v} = x^2\partial_x + xy\partial_y$.

À l'inverse, si nous avons un générateur infinitésimal, son groupe de transformations à un paramètre associé est donné par le flot du champ vectoriel. Celui-ci est obtenu en résolvant l'équation (3.6) et en respectant la propriété 2 du flot.

Exemple 3.20. Soit le générateur infinitésimal $\boldsymbol{v} = a\partial_x$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} &= a \\ \Rightarrow \hat{x} &= a\varepsilon + f(x). \end{aligned}$$

Toutefois, pour $\varepsilon = 0$, nous avons $\hat{x} = x$. Par conséquent, $f(x) = x$ et $\hat{x} = a\varepsilon + x$. Ainsi, le groupe de transformations à un paramètre associé est $\psi(\varepsilon, x) = a\varepsilon + x$.

Exemple 3.21. Soit le générateur infinitésimal $\boldsymbol{v} = x^2\partial_x + xy\partial_y$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \hat{x}^2 \\ \Rightarrow -\frac{1}{\hat{x}} &= \varepsilon + f(x,y) \\ \Rightarrow \hat{x} &= \frac{-1}{\varepsilon + f(x,y)}. \end{aligned}$$

Toutefois, pour $\varepsilon = 0$, nous avons $\hat{x} = x$. Par conséquent, $f(x,y) = \frac{-1}{x}$ et $\hat{x} = \frac{x}{1-\varepsilon x}$. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \hat{x}\hat{y} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{y} &= \frac{x}{1-\varepsilon x}\mathrm{d}\varepsilon \\ \Rightarrow \hat{y} &= \frac{1}{1-\varepsilon x}g(x,y). \end{aligned}$$

Toutefois, pour $\varepsilon = 0$, nous avons $\hat{y} = y$. Par conséquent, $g(x,y) = y$ et $\hat{y} = \frac{y}{1-\varepsilon x}$. Ainsi, le groupe de transformations à un paramètre associé est $\psi(\varepsilon, (x,y)) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right)$.

Crochet de Lie et algèbre de Lie

Pour définir une des opérations les plus importantes des champs vectoriels, nous devons savoir comment une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ change sous l'effet du flot $\psi(\varepsilon, x)$ généré par un champ vectoriel $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_{x_i}$. Ainsi, nous regarderons $f(\psi)$ lorsque ε varie. Nous obtenons alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} f(\psi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\psi) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\psi) = \boldsymbol{v}(f)(\psi) \tag{3.9}$$

et à $\varepsilon = 0$, nous avons

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(\psi) = \boldsymbol{v}(f)(x). \tag{3.10}$$

De plus,

$$f(\psi) = f(x) + \varepsilon \boldsymbol{v}(f)(x) + O(\varepsilon^2) \tag{3.11}$$

et par conséquent, $\boldsymbol{v}(f)$ nous donne le changement infinitésimal de la fonction f sous l'effet du flot généré par $\boldsymbol{v}$.

Définition 3.22. Si $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont des champs vectoriels sur une variété M, le crochet de Lie $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ représente l'unique champ vectoriel qui satisfait la propriété suivante :

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}](f) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}(f)) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}(f)) \tag{3.12}$$

pour n'importe quelle fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$.

De plus, le crochet de Lie est un opérateur bilinéaire antisymétrique qui respecte l'identité de Jacobi.

Exemple 3.23. Soit $\boldsymbol{v} = y\partial_x$ et $\boldsymbol{w} = x^2\partial_x + xy\partial_y$, alors

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{v}(x^2)\partial_x + \boldsymbol{v}(xy)\partial_y - \boldsymbol{w}(y)\partial_x \\ &= xy\partial_x + y^2\partial_y.\end{aligned}$$

Le crochet de Lie est très important, car il nous permet de définir une algèbre de Lie.

Définition 3.24. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni du crochet de Lie. De plus, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G est l'espace vectoriel de tous les champs vectoriels invariants à droite sur G.

3.2.2 Groupes de symétries et équations différentielles

Maintenant que nous connaissons les liens qui unissent les groupes de Lie, les champs vectoriels et les algèbres de Lie, nous pouvons aborder les groupes de symétries des systèmes d'équations différentielles. Pour ce faire, nous regarderons d'abord ce qui se passe dans le cas d'un système d'équations algébriques. Puis, grâce à la notion de prolongement, nous serons en mesure de trouver le groupe de symétries d'un système d'équations différentielles.

Système d'équations algébriques

Soit un système d'équations algébriques [iii]

$$F_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, l \tag{3.13}$$

où les F_i sont des fonctions réelles définies pour $x \in M$ une variété. Le groupe de symétries du système est le plus grand groupe local de transformations G qui agit sur M et qui a la particularité de transformer une solution du système en une autre solution. Ainsi, si $x \in M$ et que $F_i(x) = 0$ pour $i = 1, \ldots, l$, alors pour $g \in G$, $F_i(g * x) = 0$ pour $i = 1, \ldots, l$.

iii. Le terme algébrique signifie simplement qu'il ne s'agit pas d'équations différentielles, mais uniquement de fonctions différentiables.

Il reste évidemment à trouver le groupe G et les éléments qui suivent nous permettrons de le faire.

Définition 3.25. Soit G un groupe local de transformations qui agit sur une variété M. Un sous-ensemble $S \subset M$ est un invariant de G et G est un groupe de symétries de S si pour $x \in S$ et $g \in G$, $g * x \in S$.

Exemple 3.26. Soit $M = \mathbb{R}^2$, S la ligne $x = cy + d$ où $c, d \in \mathbb{R}$ et G le groupe de translations

$$(x, y) \mapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

alors la ligne S est un invariant de G et G est un groupe de symétrie de S, car si $x = cy + d$, alors $\hat{x} = c\hat{y} + d$, avec $\hat{x} = x + c\varepsilon$ et $\hat{y} = y + \varepsilon$.

Remarque 3.27. *Dans la plupart des cas, l'ensemble S sera l'ensemble des solutions du système.*

Avant de regarder les symétries des solutions d'un système d'équations algébriques, regardons d'abord les symétries des fonctions $F_i(x)$ qui le déterminent.

Définition 3.28. Soit G un groupe local de transformations qui agit sur une variété M. Une fonction $f : M \to N$, où N est une autre variété, est une fonction invariante de G si pour $x \in M$ et $g \in G$, $f(g * x) = f(x)$.

Exemple 3.29. Soit $M = \mathbb{R}^2$ et G le groupe de translations

$$(x, y) \mapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

où c est une constante fixée, alors la fonction $f(x, y) = x - cy$ est une fonction invariante de G, car

$$f(x + c\varepsilon, y + \varepsilon) = x + c\varepsilon - c(y + \varepsilon) = x - cy = f(x, y).$$

Nous pouvons maintenant faire le lien entre les fonctions invariantes et les générateurs infinitésimaux.

Théorème 3.30. *Soit G un groupe connexe de transformations qui agit sur une variété M. Une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction invariante de G si et seulement si*

$$\boldsymbol{v}(f) = 0, \quad \forall x \in M, \tag{3.14}$$

et pour tous les générateurs infinitésimaux $\boldsymbol{v}$ de G.

Exemple 3.31. Soit $M = \mathbb{R}^2$ et G le groupe de translations

$$(x, y) \mapsto (x + c\varepsilon, y + \varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

où c est une constante fixée, le générateur infinitésimal est donné par $\boldsymbol{v} = c\partial_x + \partial_y$. Ainsi, puisque

$$\boldsymbol{v}(x - cy) = (c\partial_x + \partial_y)(x - cy) = 0,$$

$f(x, y) = x - cy$ est une fonction invariante de G. Ceci confirme d'ailleurs l'exemple 3.29.

Enfin, nous sommes en mesure d'établir le groupe de symétries d'un système d'équations algébriques.

Théorème 3.32. *Soit G un groupe local connexe de transformations qui agit sur une variété M de dimension n. Soit*

$$F_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots l, \tag{3.15}$$

un système d'équations algébriques de rang maximal, alors G est un groupe de symétries du système si et seulement si

$$\boldsymbol{v}(F_i(x)) = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \quad \textit{lorsque } F(x) = 0, \tag{3.16}$$

pour tous les générateurs infinitésimaux $\boldsymbol{v}$ de G.

Exemple 3.33. Soit l'équation $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^2 - 1 = 0$ et G le groupe de rotation SO(2)

$$(x,y) \mapsto (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Le générateur infinitésimal de G est donné par $\boldsymbol{v} = -y\partial_x + x\partial_y$. Ainsi,

$$\boldsymbol{v}(f) = -4x^3y - 2xy^3 + 2x^3y + 2xy = \frac{-2xy}{x^2+1}f(x,y).$$

Par conséquent, puisque $\boldsymbol{v}(f) = 0$ lorsque $f(x,y) = 0$, G est un groupe de symétries de l'équation.

Prolongement

Le dernier outil nécessaire pour trouver le groupe de symétries d'un système d'équations différentielles est le prolongement. Pour ce faire, nous allons travailler uniquement sur des espaces euclidiens.

Si nous avons une fonction $f(x) = f(x_1, \ldots, x_p)$ qui dépend de p variables indépendantes, alors il y a $\binom{p+k-1}{k}$ dérivées partielles d'ordre k. Nous utiliserons donc la notation

$$\partial_J f(x) := \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} \tag{3.17}$$

où $J = (j_1, \ldots, j_k)$, des indices non ordonnés représentant les dérivées utilisées tel que $1 \leq j_k \leq p$. De plus, si $f : X \to U$ où $X \simeq \mathbb{R}^p$ et $U \simeq \mathbb{R}^q$, alors $u = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) = (u_1, \ldots, u_q)$. Par conséquent, nous noterons $u_\alpha^J := \partial_J f_\alpha(x)$. Le nombre de u_α^J dépend évidemment du nombre de variables dépendantes (q) et du nombre de dérivées d'ordre k. Ces composantes forment d'ailleurs un nouvel espace euclidien que nous nommerons U_k. À partir de cet ensemble, nous pouvons créer l'ensemble

$$U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n. \tag{3.18}$$

Un point de $U^{(n)}$ sera d'ailleurs noté $u^{(n)}$.

Exemple 3.34. Considérons le cas d'une fonction réelle $u = f(x, y)$ dans le plan cartésien. Nous avons donc $X \simeq \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (x, y), $U \simeq \mathbb{R}$ avec la coordonnée u, $U_1 \simeq \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (u_x, u_y), $U_2 \simeq R^3$ avec les coordonnées (u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}), etc. Finalement, l'espace $U^{(2)} = U \times U_1 \times U_2 \simeq \mathbb{R}^6$, avec les coordonnées $(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$, représente toutes les dérivées de u par rapport à x et y jusqu'à l'ordre 2.

Définition 3.35. Soit une fonction $u = f(x)$ où $f : X \to U$, le n$^{\text{ième}}$ prolongement de f est donné par $u^{(n)}$, c.-à-d.

$$\mathrm{pr}^{(n)} f(x) = u^{(n)}. \tag{3.19}$$

Ainsi, $\mathrm{pr}^{(n)} f(x)$ est une fonction qui va de X vers $U^{(n)}$. En reprenant l'exemple précédant, nous avons $\mathrm{pr}^{(2)} f(x, y) = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$.

Exemple 3.36. Si $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$, alors

$$\mathrm{pr}^{(2)} f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2 - 3y^2, -6xy, 6x, -6y, -6x).$$

Maintenant supposons que G est un groupe local de transformations qui agit sur $M \subseteq X \times U$, le n$^{\text{ième}}$ prolongement de G, noté $\mathrm{pr}^{(n)} G$, agira sur $M^{(n)} = M \times U_1 \times \cdots \times U_n$. Ce prolongement est défini de sorte qu'il associe les dérivées d'une fonction $u = f(x)$ aux dérivées correspondantes de la fonction transformée $\hat{u} = \hat{f}(\hat{x})$.

Définition 3.37. Soit $M \subsetneq X \times U$ un ouvert et $\boldsymbol{v}$ un champ vectoriel de M associé au groupe local de transformations à un paramètre $\psi(\varepsilon, x)$. Le n$^{\text{ième}}$ prolongement de $\boldsymbol{v}$, noté $\mathrm{pr}^{(n)} \boldsymbol{v}$ est un champ vectoriel de $M^{(n)}$ et il est un générateur infinitésimal de

$\mathrm{pr}^{(n)}\psi$. Ainsi,

$$\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v}|_{(x,u^{(n)})} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathrm{pr}^{(n)}\psi(x,u^{(n)}), \quad \forall (x,u^{(n)}) \in M^{(n)}. \tag{3.20}$$

Remarque 3.38. *D'après cette définition, si*

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i(x,u)\partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x,u)\partial_{u_\alpha}, \tag{3.21}$$

alors

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i\partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J \varphi_\alpha^J\partial_{u_\alpha^J}. \tag{3.22}$$

La dernière notion qui nous permettra de simplifier le prolongement d'un champ vectoriel est la dérivée totale.

Définition 3.39. La dérivée totale par rapport à x_i d'une fonction $\varphi(x,u)$ est donnée par

$$D_i\varphi(x,u) := \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial u}. \tag{3.23}$$

En généralisant, si $F(x,u^{(n)})$ est une fonction lisse de x, u et de ses dérivées jusqu'à n, la $i^{\text{ième}}$ dérivée totale de F est donnée par

$$D_iF := \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u_\alpha^{J,i}\frac{\partial F}{\partial u_\alpha^J} \tag{3.24}$$

où $J = (j_1, \ldots, j_k)$ et $u_\alpha^{J,i} = \frac{\partial^{k+1}u_\alpha}{\partial x_i\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}$.

Finalement, avec le concept de dérivée totale, il est possible de simplifier le prolongement d'un champ vectoriel.

Théorème 3.40. *Soit*

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i(x,u)\partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x,u)\partial_{u_\alpha} \tag{3.25}$$

un champ vectoriel défini sur un sous-ensemble ouvert $M \subset X \times U$. Le $n^{ième}$ prolongement de $\boldsymbol{v}$ est le champ vectoriel

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \partial_{u_\alpha^J} \tag{3.26}$$

défini sur $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ où $J = (j_1, \ldots, j_k)$, des indices non ordonnés représentant les dérivées utilisées tel que $1 \leq j_k \leq p$ et $1 \leq k \leq n$. De plus, les coefficients $\varphi_\alpha^J(x, u^{(n)})$ sont donnés par

$$\varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J\left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_\alpha^i\right) + \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_\alpha^{J,i} \tag{3.27}$$

où $u_\alpha^i = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}$ et $u_\alpha^{J,i} = \frac{\partial^{k+1} u_\alpha}{\partial x_i \partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$.

Système d'équations différentielles

Soit $\Delta(x, u^{(n)})$ un système d'équations différentielles avec p variables indépendantes $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et q variables dépendantes $u = (u_1, \ldots, u_q)$, alors la solution du système aura la forme $u = f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_q(x_1, \ldots, x_p))$. De plus, prenons $X = \mathbb{R}^p$ l'espace représentant les variables indépendantes et $U = \mathbb{R}^q$ l'espace représentant les variables dépendantes. Un groupe de symétries du système Δ sera un groupe local de transformations G qui agit sur $M \subseteq X \times U$ un ouvert tel que G transforme une solution de Δ en une autre solution de Δ. Ainsi, si $u = f(x)$ est une solution du système et que $g \in G$, alors $\hat{u} = g * f(x) = \hat{f}(\hat{x})$ est aussi une solution du système.

Exemple 3.41. Soit l'équation de la chaleur $u_t = u_{xx}$, alors le groupe de translations

$$(x, t, u) \mapsto (x + \varepsilon a, t + \varepsilon b, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

est un groupe de symétries, car si $u = f(x, t)$ est une solution de l'équation, alors $\hat{u} = f(x - \varepsilon a, t - \varepsilon b)$ est aussi une solution de l'équation.

Théorème 3.42. *Soit $M \subseteq X \times U$ un sous-ensemble ouvert et $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ un système d'équations différentielles d'ordre n défini sur M équivalent à une sous-variété $P_\Delta \subseteq M^{(n)}$. Si G est un groupe local de transformations qui agit sur M et dont le prolongement laisse P_Δ invariant, c.-à-d. si $(x, u^{(n)}) \in P_\Delta$, alors $pr^{(n)} g * (x, u^{(n)}) \in P_\Delta$ $\forall g \in G$, alors G est un groupe de symétries du système d'équations différentielles.*

Théorème 3.43. *Supposons que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ est un système de rang maximal de m équations différentielles E_s définies sur $M \subset X \times U$. Si G est un groupe local de transformations qui agit sur M et que*

$$pr^{(n)}\boldsymbol{v}(E_s) = 0, \qquad s = 1, \cdots, m, \quad \textit{lorsque } \Delta(x, u^{(n)}) = 0 \tag{3.28}$$

pour chaque générateur infinitésimal $\boldsymbol{v}$ de G, alors G est un groupe de symétries du système.

Théorème 3.44. *Soit Δ un système d'équations différentielles de rang maximal défini sur $M \subseteq X \times U$. L'ensemble de toutes les symétries infinitésimales de ce système forme une algèbre de Lie sur M. De plus, si l'algèbre de Lie est de dimension finie, alors le groupe de symétries du système est un groupe local de transformations qui agit sur M.*

3.2.3 Calcul du groupe de symétries d'un système d'équations différentielles

Grâce aux théorèmes 3.40 et 3.43, nous sommes maintenant en mesure de trouver le groupe de symétries d'un système d'équations différentielles. Pour ce faire, nous allons poser comme inconnus les coefficients $\xi_i(x, u)$ et $\varphi_\alpha(x, u)$ d'un générateur infinitésimal $\boldsymbol{v}$ associé à un hypothétique groupe de symétries de notre système d'équations différentielles. Par la suite, nous calculerons les coefficients φ_α^J de $\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v}$ qui feront intervenir les dérivées partielles. Puis, grâce au théorème 3.43, nous éliminerons les dépendances entre les différentes dérivées de u, ce qui nous permettra d'égaler à 0 les coefficients restants. Cela nous donnera plusieurs équations différentielles (équations déterminantes) faisant intervenir les coefficients ξ_i et φ_α. La solution générale nous donnera par la suite les symétries infinitésimales les plus générales du système et le théorème 3.44 nous assurera que les générateurs infinitésimaux trouvés forment une algèbre de Lie. Finalement, comme pour les exemples 3.20 et 3.21, nous pourrons trouver les groupes de symétries associés à chaque générateur infinitésimal.

Voyons maintenant un résumé des étapes décrites précédemment.

Étape 1 : Identifier le système d'équations.

Soit $\Delta(x, u^{(n)})$ un système de m d'équations différentielles avec p variables indépendantes $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et q variables dépendantes $u = (u_1, \ldots, u_q)$, alors le système est traduit par

$$E_s(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}) = 0, \quad s = 1, \ldots, m \tag{3.29}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $u = (u_1, \ldots, u_q)$.

Étape 2 : Identifier le champ vectoriel.

Le champ vectoriel du système est donné par

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i(x, u)\partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha(x, u)\partial_{u_\alpha}. \tag{3.30}$$

Étape 3 : Déterminer le prolongement du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$.

Le prolongement de $\boldsymbol{v}$ dépend de l'ordre n du système. Celui-ci est donné par

$$\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \varphi_\alpha^J(x, u^{(n)})\partial_{u_\alpha^J} \tag{3.31}$$

où $J = (j_1, \ldots, j_k)$, des indices non ordonnées représentant les dérivées utilisées tel que $1 \leq j_k \leq p$ et $1 \leq k \leq n$ et où $u_\alpha^J = \frac{\partial^k u_\alpha}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$.

Étape 4 : Simplifier $\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v}$ en fonction du système d'équations.

La simplification se fait en appliquant le prolongement sur le système d'équations, c.-à-d.

$$\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v}(E_s) = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{3.32}$$

Étape 5 : Calculer les coefficients.

Les coefficients φ_α^J sont donnés par

$$\varphi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J\left(\varphi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_\alpha^i\right) + \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_\alpha^{J,i} \tag{3.33}$$

où

$$D_i\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} u_\alpha^i \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha}, \quad u_\alpha^i = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad u_\alpha^{J,i} = \frac{\partial^{k+1} u_\alpha}{\partial x_i \partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}.$$

Étape 6 : Remplacer les coefficients et simplifier.

Nous devons remplacer les coefficients φ_α^J obtenus à l'étape 5 dans les équations obtenues à l'étape 4. Puis, nous devons simplifier ces nouvelles équations grâce au système d'équations de l'étape 1.

Étape 7 : Obtenir les équations déterminantes.

Dans l'étape 6, puisque les dérivées sont indépendantes, les coefficients devant chacune des dérivées doivent être égaux à 0. Ainsi, nous obtenons un système d'équations.

Étape 8 : Trouver la solution générale.

Nous devons résoudre le système d'équations obtenu à l'étape 7.

Étape 9 : Trouver les symétries.

En remplaçant la solution trouver à l'étape 8 dans le champ vectoriel trouvé à l'étape 2, les symétries v_i sont obtenues en posant les constantes $c_i = 1$ et $c_j = 0$ où $j \neq i$.

Étape 10 : Trouver les groupes de symétries.

Les groupes de symétries sont obtenus à partir des générateurs infinitésimaux v_i trouvés à l'étape 9. Pour chaque générateur v_i, nous devons trouver son flot qui est donné en résolvant l'équation (3.6) et en respectant la propriété 2 du flot, c.-à-d. $\psi(0, x) = x$.

3.3 Exemples

Dans la section précédente, nous avons vu la théorie qui nous permet de trouver le groupe de symétries d'un système d'équations différentielles. Nous allons maintenant appliquer la théorie avec trois exemples : l'équation de Burger, l'équation d'Euler et l'équation de Riccati quaternionique. Les résultats de la dernière équation ont été publiés dans [26] par mon directeur de recherche et moi-même en 2018. Dans chaque cas, nous allons suivre les étapes mentionnées à la fin de la dernière section. De plus, les résultats obtenus dans les trois exemples ont été vérifiés dans Maple 16 grâce à l'outil PDEtools.

3.3.1 Équation de Burger

La première équation traitée est l'équation de Burger [24].

Étape 1 : Identifier le système d'équations.

L'équation de Burger est donnée par

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 \tag{3.34}$$

où $u = u(x,t)$. Par conséquent, nous avons deux variables indépendantes (x et t) et une variable dépendante (u). Ainsi, $p = 2$, $q = 1$ et $n = 2$. Le système comprend une seule équation différentielle :

$$E \equiv u_t - u_{xx} - u_x^2 = 0. \tag{3.35}$$

Étape 2 : Identifier le champ vectoriel.

Comme $p = 2$ et $q = 1$, d'après (3.30), nous avons le champ vectoriel

$$\boldsymbol{v} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \varphi(x,t,u)\partial_u. \tag{3.36}$$

Étape 3 : Déterminer le prolongement du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$.

Comme $n = 2$, nous devons utiliser le deuxième prolongement. Ainsi, d'après (3.31), le deuxième prolongement du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}^{(2)}\boldsymbol{v} &= \xi\partial_x + \tau\partial_t + \varphi\partial_u + \sum_J \varphi^J \frac{\partial}{\partial u^J} \\ &= \xi\partial_x + \tau\partial_t + \varphi\partial_u + \varphi^x\partial_{u_x} + \varphi^t\partial_{u_t} \\ &\quad + \varphi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \varphi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \varphi^{tt}\partial_{u_{tt}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Étape 4 : Simplifier $\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v}$ en fonction du système d'équations.

De (3.35) et (3.37), en utilisant (3.32), nous avons

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}^{(2)}\boldsymbol{v}(E) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\varphi^t - \varphi^{xx} - 2u_x\varphi^x = 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Étape 5 : Calculer les coefficients.

D'après (3.33), les coefficients φ^x, φ^t et φ^{xx} sont donnés par

$$\begin{aligned}
\varphi^x = {} & D_x(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} \\
= {} & D_x\varphi - u_x D_x\xi - \xi D_x u_x - u_t D_x\tau - \tau D_x u_t + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} \\
= {} & \varphi_x + \varphi_u u_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \tau_x u_t - \tau_u u_x u_t,
\end{aligned} \tag{3.39a}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^t = {} & D_t(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} \\
= {} & D_t\varphi - u_x D_t\xi - \xi D_t u_x - u_t D_t\tau - \tau D_t u_t + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} \\
= {} & \varphi_t + \varphi_u u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_x u_t - \tau_t u_t - \tau_u u_t^2,
\end{aligned} \tag{3.39b}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi^{xx} = {} & D_x(\varphi^x - \xi u_{xx} - \tau u_{xt}) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\
= {} & D_x\varphi_x + u_x D_x\varphi_u + \varphi_u D_x u_x - u_x D_x\xi_x - \xi_x D_x u_x - u_x^2 D_x\xi_u \\
& -\xi_u D_x u_x^2 - u_t D_x\tau_x - \tau_x D_x u_t - u_x u_t D_x\tau_u - \tau_u u_x D_x u_t - \tau_u u_t D_x u_x \\
& -u_{xx} D_x\xi - \xi D_x u_{xx} - u_{xt} D_x\tau - \tau D_x u_{xt} + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\
= {} & \varphi_{xx} + 2\varphi_{ux} u_x + \varphi_{uu} u_x^2 + \varphi_u u_{xx} - \xi_{xx} u_x - 2\xi_{xu} u_x^2 - 2\xi_x u_{xx} \\
& -\xi_{uu} u_x^3 - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_{uu} u_x^2 u_t - \tau_{xx} u_t - 2\tau_{ux} u_x u_t - 2\tau_u u_x u_{xt} \\
& -\tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_x u_{xt}.
\end{aligned} \tag{3.39c}$$

Étape 6 : Remplacer les coefficients et simplifier.

De (3.38) et (3.39), nous avons

$$\begin{aligned}
& (\varphi_t - \varphi_{xx}) + (\xi_{xx} - \xi_t - 2\varphi_x - 2\varphi_{ux})u_x + (\varphi_u + \tau_{xx} - \tau_t)u_t \\
& + (2\tau_{ux} + 2\tau_x - \xi_u)u_x u_t + (2\xi_x + 2\xi_{xu} - 2\varphi_u - \varphi_{uu})u_x^2 + (2\tau_u + \tau_{uu})u_x^2 u_t \\
& + (2\xi_u + \xi_{uu})u_x^3 + (2\xi_x - \varphi_u)u_{xx} - \tau_u u_t^2 + 2\tau_x u_{xt} + 2\tau_u u_x u_{xt} \\
& + \tau_u u_t u_{xx} + 3\xi_u u_x u_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Toutefois, de (3.35), nous avons aussi

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{3.41a}$$

$$u_{xt} = u_{xxx} + 2u_x u_{xx}, \tag{3.41b}$$

$$u_t^2 = u_{xx}^2 + 2u_{xx}u_x^2 + u_x^4. \tag{3.41c}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(\varphi_t - \varphi_{xx}) + (\xi_{xx} - \xi_t - 2\varphi_x - 2\varphi_{ux})u_x \\
&+ (2\xi_x + 2\xi_{xu} - \varphi_u + \tau_{xx} - \tau_t - \varphi_{uu})u_x^2 \\
&+ (\xi_u + \xi_{uu} + 2\tau_{ux} + 2\tau_x)u_x^3 + (\tau_u + \tau_{uu})u_x^4 \\
&+ (2\xi_x + \tau_{xx} - \tau_t)u_{xx} + (2\xi_u + 2\tau_{ux} + 6\tau_x)u_x u_{xx} + (\tau_{uu} + 5\tau_u)u_x^2 u_{xx} \\
&+ (2\tau_x)u_{xxx} + (2\tau_u)u_x u_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Étape 7 : Obtenir les équations déterminantes.

Puisque les dérivées de u sont indépendantes, à partir de (3.42), nous obtenons les équations déterminantes suivantes :

$$\varphi_t - \varphi_{xx} = 0, \tag{3.43a}$$

$$\xi_{xx} - \xi_t - 2\varphi_x - 2\varphi_{ux} = 0, \tag{3.43b}$$

$$2\xi_x + 2\xi_{xu} - \varphi_u + \tau_{xx} - \tau_t - \varphi_{uu} = 0, \tag{3.43c}$$

$$\xi_u + \xi_{uu} + 2\tau_{ux} + 2\tau_x = 0, \tag{3.43d}$$

$$\tau_u + \tau_{uu} = 0, \tag{3.43e}$$

$$2\xi_x + \tau_{xx} - \tau_t = 0, \tag{3.43f}$$

$$2\xi_u + 2\tau_{ux} + 6\tau_x = 0, \tag{3.43g}$$

$$\tau_{uu} + 5\tau_u = 0, \tag{3.43h}$$

$$2\tau_x = 0, \tag{3.43i}$$

$$2\tau_u = 0. \tag{3.43j}$$

Étape 8 : Trouver la solution générale.

Des équations (3.43i) et (3.43j), nous avons que τ dépend uniquement de t. Ainsi, $\tau = \tau(t)$.

Par conséquent, de l'équation (3.43g), nous avons que ξ ne dépend pas de u. Ainsi, $\xi = \xi(x,t)$.

Avec ces deux informations, les 10 équations déterminantes initiales sont remplacées par les quatre suivantes :

$$\varphi_t - \varphi_{xx} = 0, \tag{3.44a}$$

$$\xi_{xx} - \xi_t - 2\varphi_x - 2\varphi_{ux} = 0, \tag{3.44b}$$

$$2\xi_x - \varphi_u - \tau_t - \varphi_{uu} = 0, \tag{3.44c}$$

$$2\xi_x - \tau_t = 0. \tag{3.44d}$$

En utilisant l'équation (3.44d), l'équation (3.44c) devient

$$\varphi_u + \varphi_{uu} = 0. \tag{3.45}$$

De plus, en dérivant par x l'équation (3.44d), nous obtenons $2\xi_{xx} = \tau_{xt} = 0$, donc $\xi = \alpha(t)x + \beta(t)$ et $\tau_t = 2\alpha(t)$. Ainsi,

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \beta(t). \tag{3.46}$$

Avec ces informations, l'équation (3.44b) devient

$$\xi_t 2\varphi_x 2\varphi_{ux} = 0. \tag{3.47}$$

De l'équation (3.45), nous avons que $\varphi + \varphi_u = \gamma(x,t)$ et

$$\varphi = k(x,t)e^{-u} + \gamma(x,t). \tag{3.48}$$

En combinant avec l'équation (3.47), nous avons

$$-\frac{1}{2}\xi_t = \varphi_x + \varphi_{ux} = \gamma_x. \tag{3.49}$$

Comme $\xi_{xx} = 0$, alors $\gamma_{xxx} = 0$, donc

$$\gamma = \gamma_0(t) + \gamma_1(t)x + \gamma_2(t)x^2. \tag{3.50}$$

Par conséquent, de (3.46), (3.49) et (3.50),

$$\xi_t = \frac{1}{2}\tau_{tt}x + \beta_t = -2\gamma_x = -4\gamma_2 x - 2\gamma_1. \tag{3.51}$$

Donc, $\gamma_1(t) = -\frac{1}{2}\beta_t$ et $\gamma_2(t) = -\frac{1}{8}\tau_{tt}$.

Maintenant, si nous résumons, nous avons

$$\varphi = k(x,t)e^{-u} - \frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\beta_t x + \gamma_0, \tag{3.52a}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \beta, \tag{3.52b}$$

$$\varphi_t - \varphi_{xx} = 0. \tag{3.52c}$$

Ainsi, de (3.52a), nous avons

$$\varphi_t = k_t e^{-u} - \frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 - \frac{1}{2}\beta_{tt}x + \gamma_{0_t} \tag{3.53a}$$

et

$$\varphi_{xx} = k_{xx}e^{-u} - \frac{1}{4}\tau_{tt}. \tag{3.53b}$$

En combinant avec (3.52c), cela nous donne

$$k_t e^{-u} - \frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 - \frac{1}{2}\beta_{tt}x + \gamma_{0_t} = k_{xx}e^{-u} - \frac{1}{4}\tau_{tt}. \tag{3.54}$$

Donc, $\tau_{ttt} = 0$, $\beta_{tt} = 0$, $k_t = k_{xx}$ et $\gamma_{0_t} = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$.

Ainsi,

$$\xi(x,t) = 4c_6xt + c_4x + 2c_5t + c_1, \tag{3.55a}$$

$$\tau(t) = 4c_6t^2 + 2c_4t + c_2, \tag{3.55b}$$

$$\varphi(x,t,u) = k(x,t)e^{-u} - c_6x^2 - c_5x - 2c_6t + c_3. \tag{3.55c}$$

Étape 9 : Trouver les symétries.

Les symétries sont données en remplaçant (3.55) dans (3.36) et en posant à tour de rôle $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $c_5 = 1$, $c_6 = 1$ et $k(x,t) = k(x,t)$, tout en maintenant les autres coefficients égaux à 0. Ainsi, nous trouvons les générateurs infinitésimaux suivants :

$$v_1 = \partial_x, \tag{3.56a}$$

$$v_2 = \partial_t, \tag{3.56b}$$

$$v_3 = \partial_u, \tag{3.56c}$$

$$v_4 = x\partial_x + 2t\partial_t, \tag{3.56d}$$

$$v_5 = 2t\partial_x - x\partial_u, \tag{3.56e}$$

$$v_6 = 4xt\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)\partial_u, \tag{3.56f}$$

$$v_k = k(x,t)e^{-u}\partial_u. \tag{3.56g}$$

Étape 10 : Trouver les groupes de symétries.

En appliquant le même raisonnement que pour les exemples 3.20 et 3.21, nous trouvons les groupes de symétries suivants :

$$G_1 = (x+\varepsilon, t, u), \tag{3.57a}$$

$$G_2 = (x, t+\varepsilon, u), \tag{3.57b}$$

$$G_3 = (x, t, u+\varepsilon), \tag{3.57c}$$

$$G_4 = (e^{\varepsilon}x, e^{2\varepsilon}t, u), \tag{3.57d}$$

$$G_5 = (x+2\varepsilon t, t, u-\varepsilon x-\varepsilon^2 t), \tag{3.57e}$$

$$G_6 = \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u+\ln\left(\sqrt{1-4\varepsilon t}\right)-\frac{\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right), \tag{3.57f}$$

$$G_k = (x, t, \ln(e^u+\varepsilon k(x,t))). \tag{3.57g}$$

3.3.2 Équation d'Euler

Comme deuxième exemple, nous considérons l'équation d'Euler pour le déplacement d'un liquide en trois dimensions [24].

Étape 1 : Identifier le système d'équations.

L'équation d'Euler s'écrit

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\mathbf{u} = -\mathbf{grad}\,p \text{ avec } \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{3.58}$$

Les variables indépendantes de l'équation sont la position $\mathbf{x} = (x, y, z)$ et le temps t et les variables dépendantes de l'équation sont le champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$ et la pression p. Par conséquent, l'équation (3.58) se traduit par les quatre équations suivantes :

$$E_1 \equiv u_t + uu_x + vu_y + wu_z + p_x = 0, \tag{3.59a}$$

$$E_2 \equiv v_t + uv_x + vv_y + wv_z + p_y = 0, \tag{3.59b}$$

$$E_3 \equiv w_t + uw_x + vw_y + ww_z + p_z = 0, \tag{3.59c}$$

$$E_4 \equiv u_x + v_y + w_z = 0. \tag{3.59d}$$

Étape 2 : Identifier le champ vectoriel.

Comme $p = 4$ et $q = 4$, d'après (3.30), nous avons le champ vectoriel

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = {} & \xi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_x + \eta(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_y + \zeta(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_z + \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_t \\ & + \varphi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_u + \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_v + \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_w + \pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)\partial_p. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Étape 3 : Déterminer le prolongement du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$.

Comme $n = 1$, nous devons utiliser le premier prolongement. Ainsi, d'après (3.31), le premier prolongement de $\boldsymbol{v}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v} &= \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + \tau\partial_t + \varphi\partial_u + \psi\partial_v + \chi\partial_w + \pi\partial_p + \sum_J \varphi^J \frac{\partial}{\partial u_J} \\ &= \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + \tau\partial_t + \varphi\partial_u + \psi\partial_v + \chi\partial_w + \pi\partial_p \\ &\quad + \varphi^x\partial_{u_x} + \varphi^y\partial_{u_y} + \varphi^z\partial_{u_z} + \varphi^t\partial_{u_t} + \psi^x\partial_{v_x} + \psi^y\partial_{v_y} \\ &\quad + \psi^z\partial_{v_z} + \psi^t\partial_{v_t} + \chi^x\partial_{w_x} + \chi^y\partial_{w_y} + \chi^z\partial_{w_z} + \chi^t\partial_{w_t} \\ &\quad + \pi^x\partial_{p_x} + \pi^y\partial_{p_y} + \pi^z\partial_{p_z} + \pi^t\partial_{p_t}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Étape 4 : Simplifier $\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v}$ en fonction du système d'équations.

De (3.59) et (3.61), en utilisant (3.32), nous avons

$$\begin{aligned}&\mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\varphi^t+u\varphi^x+v\varphi^y+w\varphi^z+u_x\varphi+u_y\psi+u_z\chi+\pi^x=0,\end{aligned}\tag{3.62a}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_2)=0\\ \Leftrightarrow\ &\psi^t+u\psi^x+v\psi^y+w\psi^z+v_x\varphi+v_y\psi+v_z\chi+\pi^y=0,\end{aligned}\tag{3.62b}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_3)=0\\ \Leftrightarrow\ &\chi^t+u\chi^x+v\chi^y+w\chi^z+w_x\varphi+w_y\psi+w_z\chi+\pi^z=0,\end{aligned}\tag{3.62c}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_4)=0\\ \Leftrightarrow\ &\varphi^x+\psi^y+\chi^z=0.\end{aligned}\tag{3.62d}$$

Étape 5 : Calculer les coefficients.

D'après (3.33), les coefficients φ^x, φ^y, φ^z, φ^t, ψ^x, ψ^y, ψ^z, ψ^t, χ^x, χ^y, χ^z, χ^t, π^x, π^y, π^z et π^t sont donnés par

$$\begin{aligned}\varphi^x=\ &\varphi_x+\varphi_u u_x+\varphi_v v_x+\varphi_w w_x+\varphi_p p_x-\xi_x u_x-\xi_u u_x^2-\xi_v u_x v_x\\ &-\xi_w u_x w_x-\xi_p u_x p_x-\eta_x u_y-\eta_u u_x u_y-\eta_v u_y v_x-\eta_w u_y w_x-\eta_p u_y p_x\\ &-\zeta_x u_z-\zeta_u u_x u_z-\zeta_v u_z v_x-\zeta_w u_z w_x-\zeta_p u_z p_x-\tau_x u_t-\tau_u u_x u_t\\ &-\tau_v u_t v_x-\tau_w u_t w_x-\tau_p u_t p_x,\end{aligned}\tag{3.63a}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\pi^t=\ &\pi_t+\pi_u u_t+\pi_v v_t+\pi_w w_t+\pi_p p_t-\xi_t p_x-\xi_u u_t p_x-\xi_v v_t p_x\\ &-\xi_w w_t p_x-\xi_p p_x p_t-\eta_t p_y-\eta_u u_t p_y-\eta_v v_t p_y-\eta_w w_t p_y-\eta_p p_y p_t\\ &-\zeta_t p_z-\zeta_u u_t p_z-\zeta_v v_t p_z-\zeta_w w_t p_z-\zeta_p p_z p_t-\tau_t p_t-\tau_u u_t p_t\\ &-\tau_v v_t p_t-\tau_w w_t p_t-\tau_p p_t^2.\end{aligned}\tag{3.63p}$$

En exemple, voici le calcul pour φ^x :

$$\begin{aligned}
\varphi^x &= D_x(\varphi - \xi u_x - \eta u_y - \zeta u_z - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \eta u_{xy} + \zeta u_{xz} + \tau u_{xt} \\
&= D_x\varphi - u_x D_x\xi - \xi D_x u_x - u_y D_x\eta - \eta D_x u_y - u_z D_x\zeta - \zeta D_x u_z \\
&\quad - u_t D_x\tau - \tau D_x u_t + \xi u_{xx} + \eta u_{xy} + \zeta u_{xz} + \tau u_{xt} \\
&= D_x\varphi - u_x D_x\xi - u_y D_x\eta - u_z D_x\zeta - u_t D_x\tau \\
&= \varphi_x + \varphi_u u_x + \varphi_v v_x + \varphi_w w_x + \varphi_p p_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \xi_v u_x v_x - \xi_w u_x w_x \\
&\quad - \xi_p u_x p_x - \eta_x u_y - \eta_u u_x u_y - \eta_v u_y v_x - \eta_w u_y w_x - \eta_p u_y p_x - \zeta_x u_z \\
&\quad - \zeta_u u_x u_z - \zeta_v u_z v_x - \zeta_w u_z w_x - \zeta_p u_z p_x - \tau_x u_t - \tau_u u_x u_t - \tau_v u_t v_x \\
&\quad - \tau_w u_t w_x - \tau_p u_t p_x.
\end{aligned}$$

Étape 6 : Remplacer les coefficients et simplifier.

De (3.59), nous avons

$$p_x = -u_t - uu_x - vu_y - wu_z, \tag{3.64a}$$

$$p_y = -v_t - uv_x - vv_y - wv_z, \tag{3.64b}$$

$$p_z = -w_t - uw_x - vw_y - ww_z, \tag{3.64c}$$

$$w_z = -u_x - v_y. \tag{3.64d}$$

Ainsi, de (3.62) et (3.63), nous obtenons pour E_1 :

$$\begin{aligned}
&(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y + w\varphi_z + \pi_x) \\
&+ (+\pi_u - \xi_t + u\varphi_u - v\xi_y - w\xi_z + \varphi - w\varphi_w - u^2\varphi_p - u\pi_p + w^2\varphi_p - w\zeta_x)u_x \\
&+ (\psi - \eta_t - u\eta_x + v\varphi_u - v\eta_y - v\pi_p + v\xi_x - w\eta_z - uv\varphi_p)u_y \\
&+ (\chi - \zeta_t - u\zeta_x - v\zeta_y + w\varphi_u + w\xi_x - w\zeta_z - w\pi_p - uw\varphi_p)u_z \\
&+ (\varphi_u - \tau_t - \pi_p + \xi_x - u\varphi_p - u\tau_x - v\tau_y - w\tau_z)u_t \\
&+ (\pi_v + u\varphi_v + u\eta_x - uv\varphi_p)v_x + (v\varphi_v + v\eta_x - w\varphi_w - w\zeta_x - v^2\varphi_p + w^2\varphi_p)v_y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (w\eta_x + w\varphi_v - vw\varphi_p)v_z + (\varphi_v + \eta_x - v\varphi_p)v_t + (\pi_w + u\varphi_w + u\zeta_x - uw\varphi_p)w_x \\
&+ (v\varphi_w + v\zeta_x - vw\varphi_p)w_y + (\varphi_w + \zeta_x - w\varphi_p)w_t + (\varphi_p - \tau_x)p_t \\
&+ (w\xi_w - w\zeta_u - w^2\xi_p + uw\zeta_p)u_x^2 \\
&+ (-u\eta_u + w\eta_w + u^2\eta_p - w^2\eta_p - uv\xi_p + vw\zeta_p)u_xu_y \\
&+ (-u\zeta_u + w\zeta_w + u^2\zeta_p - uw\xi_p)u_xu_z \\
&+ (-u\tau_u + w\tau_w + u^2\tau_p - w^2\tau_p - u\xi_p + w\zeta_p)u_xu_t \\
&+ (u\eta_u - w\zeta_v - u^2\eta_p + uv\xi_p)u_xv_x \\
&+ (-v\xi_v + w\xi_w + v^2\xi_p - w^2\xi_p + v\eta_u - uv\eta_p - w\zeta_u + uw\zeta_p)u_xv_y \\
&+ (w\eta_u - w\xi_v - uw\eta_p + vw\xi_p)u_xv_z + (\eta_u - \xi_v - u\eta_p + v\xi_p)u_xv_t \\
&+ (u\zeta_u - w\zeta_w - u^2\zeta_p + uw\xi_p)u_xw_x + (v\zeta_u - v\xi_w - uv\zeta_p + vw\xi_p)u_xw_y \\
&+ (\zeta_u - \xi_w - u\zeta_p + w\xi_p)u_xw_t + (-\xi_p - \tau_u + u\tau_p)u_xp_t \\
&+ (-v\eta_u + uv\eta_p - v^2\xi_p)u_y^2 \\
&+ (-v\zeta_u - w\eta_u + uw\eta_p + uv\zeta_p - 2vw\xi_p)u_yu_z \\
&+ (-\eta_u - v\tau_u + u\eta_p + uv\tau_p - 2v\xi_p)u_yu_t + (v\xi_v - u\eta_v)u_yv_x \\
&+ (-v\eta_v + w\eta_w - w^2\eta_p + vw\zeta_p)u_yv_y + (-w\eta_v)u_yv_z + (-\eta_v)u_yv_t \\
&+ (v\xi_w - u\eta_w + uw\eta_p - uv\zeta_p)u_yw_x + (vw\eta_p - v\eta_w - v^2\zeta_p)u_yw_y \\
&+ (w\eta_p - \eta_w - v\zeta_p)u_yw_t + (v\tau_p - \eta_p)u_yp_t + (uw\zeta_p - w\zeta_u - w^2\xi_p)u_z^2 \\
&+ (-\zeta_u - w\tau_u + u\zeta_p + uw\tau_p - 2w\xi_p)u_zu_t + (w\xi_v - u\zeta_v - uw\eta_p + uv\zeta_p)u_zv_x \\
&+ (-v\zeta_v + w\zeta_w + v^2\zeta_p - vw\eta_p)u_zv_y + (vw\zeta_p - w\zeta_v - w^2\eta_p)u_zv_z \\
&+ (v\zeta_p - \zeta_v - w\eta_p)u_zv_t + (w\xi_w - u\zeta_w)u_zw_x + (-v\zeta_w)u_zw_y + (-\zeta_w)u_zw_t \\
&+ (w\tau_p - \zeta_p)u_zp_t + (-\tau_u + u\tau_p - \xi_p)u_t^2 + (\xi_v - u\tau_v - u\eta_p + uv\tau_p)u_tv_x \\
&+ (-v\tau_v + v^2\tau_p - v\eta_p + w\tau_w - w^2\tau_p + w\zeta_p)u_tv_y + (vw\tau_p - w\tau_v - w\eta_p)u_tv_z \\
&+ (v\tau_p - \tau_v - \eta_p)u_tv_t + (\xi_w - u\tau_w - u\zeta_p + uw\tau_p)u_tw_x + (vw\tau_p - v\tau_w - v\zeta_p)u_tw_y \\
&+ (w\tau_p - \zeta_p - \tau_w)u_tw_t + (u\eta_v)v_x^2 + (v\eta_v - w\zeta_v)v_xv_y + (w\eta_v)v_xv_z + (\eta_v)v_xv_t \\
&+ (u\eta_w + u\zeta_v)v_xw_x + (v\zeta_v)v_xw_y + (\zeta_v)v_xw_t + (-\tau_v)v_xp_t + (v\eta_w - w\zeta_w)v_yw_x \\
&+ (w\eta_w)v_zw_x + (\eta_w)v_tw_x + (u\zeta_w)w_x^2 + (v\zeta_w)w_xw_y + (\zeta_w)w_xw_t + (-\tau_w)w_xp_t = 0.
\end{aligned}
$$

Le même type de solution est obtenu pour E_2, E_3 et E_4.

Étape 7 : Obtenir les équations déterminantes.

Les équations déterminantes sont obtenues en isolant séparément les différentes dérivées de u, v, w et p dans E_1, E_2, E_3 et E_4. Vu le nombre d'équations, nous ne les donnerons pas ici.

Étape 8 : Trouver la solution générale.

Des équations déterminantes, nous remarquons que la symétrie est projetable, c.-à-d. que ξ, η, ζ et τ dépendent uniquement de $\boldsymbol{x}$ et t. Puis, en effectuant des manipulations similaires à ce que nous avons fait pour l'équation de Burger, nous trouvons la solution générale suivante :

$$\xi = c_6 x + c_1 y - c_2 z + \alpha, \tag{3.66a}$$

$$\eta = -c_1 x + c_6 y + c_3 z + \beta, \tag{3.66b}$$

$$\zeta = c_2 x - c_3 y + c_6 z + \gamma, \tag{3.66c}$$

$$\tau = (2c_6 + c_4)t + 2c_7 + c_5, \tag{3.66d}$$

$$\varphi = -(c_6 + c_4)u + c_1 v - c_2 w + \alpha_t, \tag{3.66e}$$

$$\psi = -c_1 u - (c_6 + c_4)v + c_3 w + \beta_t, \tag{3.66f}$$

$$\chi = c_2 u - c_3 v - (c_6 + c_4)w + \gamma_t, \tag{3.66g}$$

$$\pi = -2(c_6 + c_4)p - \alpha_{tt} x - \beta_{tt} y - \gamma_{tt} z + \theta, \tag{3.66h}$$

où α, β, γ et θ sont des fonctions de t.

Étape 9 : Trouver les symétries.

Les symétries sont données en remplaçant (3.66) dans (3.60) et en posant à tour de rôle $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $c_5 = 1$, $c_6 = 1$, $c_7 = 1$, $\alpha(t) = \alpha(t)$, $\beta(t) = \beta(t)$, $\gamma(t) = \gamma(t)$, $\theta(t) = \theta(t)$, tout en maintenant les autres coefficients égaux à 0. Ainsi, nous trouvons les générateurs infinitésimaux suivants :

$$v_1 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \tag{3.67a}$$

$$v_2 = x\partial_z - z\partial_x + u\partial_w - w\partial_u, \tag{3.67b}$$

$$v_3 = z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w, \tag{3.67c}$$

$$v_4 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2p\partial_p, \tag{3.67d}$$

$$v_5 = \partial_t, \tag{3.67e}$$

$$v_6 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t, \tag{3.67f}$$

$$v_\alpha = \alpha\partial_x + \alpha_t\partial_u - \alpha_{tt}x\partial_p, \tag{3.67g}$$

$$v_\beta = \beta\partial_y + \beta_t\partial_v - \beta_{tt}y\partial_p, \tag{3.67h}$$

$$v_\gamma = \gamma\partial_z + \gamma_t\partial_w - \gamma_{tt}z\partial_p, \tag{3.67i}$$

$$v_\theta = \theta\partial_p. \tag{3.67j}$$

Ici, v_1, v_2 et v_3 sont des rotations; v_4 et v_6 sont des dilatations; v_5 est une translation dans le temps; v_α, v_β et v_γ sont des changements de coordonnées; et v_θ est un changement de pression.

Remarque 3.45. *Notons que v_6 n'est plus sous sa forme originale et que v_7 n'est pas donnée pour éviter d'avoir des informations en double.*

Étape 10 : Trouver les groupes de symétries.

À partir des champs vectoriels obtenus à l'étape précédente, nous avons un groupe de symétries pour chaque type de champ vectoriel. Ainsi, le groupe de symétries associé aux rotations (v_1, v_2, v_3) est le groupe de rotations

$$SO(3) : (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}, p) \mapsto (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}, p) \tag{3.68a}$$

où $\boldsymbol{R}$ est une matrice 3×3 orthogonale. Ce groupe représente des rotations simultanées dans l'espace $\boldsymbol{x}$ et dans le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$.

Les groupes de symétries associés aux dilatations v_6 et v_4 sont respectivement les groupes de dilatations

$$D_1 : (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}, p) \mapsto (e^{\varepsilon}\boldsymbol{x}, e^{\varepsilon}t, \boldsymbol{u}, p) \tag{3.68b}$$

et

$$D_2 : (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}, p) \mapsto (\boldsymbol{x}, e^{\varepsilon}t, e^{-\varepsilon}\boldsymbol{u}, e^{-2\varepsilon}p). \tag{3.68c}$$

Le groupe de symétries associé à la translation dans le temps v_5 est

$$G_t : (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}, p) \mapsto (\boldsymbol{x}, t+\varepsilon, \boldsymbol{u}, p). \tag{3.68d}$$

Le groupe de symétries associé au changements de coordonnées (v_α, v_β, v_γ) est

$$G_\alpha : (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}, p) \mapsto \left(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{\alpha}(t), t, \boldsymbol{u} + \varepsilon\boldsymbol{\alpha}(t), p - \varepsilon\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{tt}\right) \tag{3.68e}$$

où $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Finalement, le groupe de symétries associé au changement de pression (v_θ) est

$$G_p : (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}, p) \mapsto (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}, p + \varepsilon\theta(t)). \tag{3.68f}$$

3.3.3 Équation de Riccati quaternionique

Comme dernier exemple, nous considérons l'équation de Riccati quaternionique vu au chapitre 2. Notons que même si nous avons traité l'équation dans les biquaternions, tout ce que nous avons vu est aussi valide dans les quaternions et l'équation prend la même forme [26].

Étape 1 : Identifier le système d'équations.

L'équation de Riccati quaternionique s'écrit

$$D\boldsymbol{Q} + |\boldsymbol{Q}|^2 = q. \tag{3.69}$$

Nous avons vu au chapitre 2, que cette équation est équivalente aux quatre équations suivantes :

$$E_1 \equiv -(u_x + v_y + w_z) + u^2 + v^2 + w^2 - q = 0, \tag{3.70a}$$

$$E_2 \equiv w_y - v_z = 0, \tag{3.70b}$$

$$E_3 \equiv u_z - w_x = 0, \tag{3.70c}$$

$$E_4 \equiv v_x - u_y = 0. \tag{3.70d}$$

Ainsi, les variables indépendantes de l'équation sont x, y, z et les variables dépendantes de l'équation sont u, v et w.

Étape 2 : Identifier le champ vectoriel.

Comme $p = 3$ et $q = 3$, d'après (3.30), nous avons le champ vectoriel suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = {} & \xi(x,y,z,u,v,w)\partial_x + \eta(x,y,z,u,v,w)\partial_y + \zeta(x,y,z,u,v,w)\partial_z \\ & + \varphi(x,y,z,u,v,w)\partial_u + \psi(x,y,z,u,v,w)\partial_v + \chi(x,y,z,u,v,w)\partial_w. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Étape 3 : Déterminer le prolongement du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$.

Comme $n = 1$, nous devons utiliser le premier prolongement. Ainsi, d'après (3.31), le premier prolongement de $\boldsymbol{v}$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v} = {}& \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + \varphi\partial_u + \psi\partial_v + \chi\partial_w + \varphi^x\partial_{u_x} + \varphi^y\partial_{u_y} \\ & + \varphi^z\partial_{u_z} + \psi^x\partial_{v_x} + \psi^y\partial_{v_y} + \psi^z\partial_{v_z} + \chi^x\partial_{w_x} + \chi^y\partial_{w_y} + \chi^z\partial_{w_z}.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Étape 4 : Simplifier $\mathrm{pr}^{(n)}\boldsymbol{v}$ en fonction du système d'équations.

De (3.70) et (3.72), en utilisant (3.32), nous avons

$$\begin{aligned}& \mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -(\varphi^x + \psi^y + \chi^z) + 2u\varphi + 2v\psi + 2w\chi - \xi q_x - \eta q_y - \zeta q_z = 0,\end{aligned} \tag{3.73a}$$

$$\begin{aligned}& \mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \chi^y - \psi^z = 0,\end{aligned} \tag{3.73b}$$

$$\begin{aligned}& \mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \varphi^z - \chi^x = 0,\end{aligned} \tag{3.73c}$$

$$\begin{aligned}& \mathrm{pr}^{(1)}\boldsymbol{v}(E_4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \psi^x - \varphi^y = 0.\end{aligned} \tag{3.73d}$$

Étape 5 : Calculer les coefficients.

D'après (3.33), les coefficients φ^x, φ^y, φ^z, ψ^x, ψ^y, ψ^z, χ^x, χ^y et χ^z sont les mêmes que ceux calculés pour l'équation d'Euler (3.63), mais sans les termes faisant intervenir t, p, τ ou π. Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi^x = {}& \varphi_x + \varphi_u u_x + \varphi_v v_x + \varphi_w w_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \xi_v u_x v_x \\ & - \xi_w u_x w_x - \eta_x u_y - \eta_u u_x u_y - \eta_v u_y v_x - \eta_w u_y w_x - \zeta_x u_z \\ & - \zeta_u u_x u_z - \zeta_v u_z v_x - \zeta_w u_z w_x,\end{aligned} \tag{3.74a}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\chi^z = {} & \chi_z + \chi_u u_z + \chi_v v_z + \chi_w w_z - \xi_z w_x - \xi_u u_z w_x - \xi_v v_z w_x \\ & - \xi_w w_x w_z - \eta_z w_y - \eta_u u_z w_y - \eta_v v_z w_y - \eta_w w_y w_z - \zeta_z w_z \\ & - \zeta_u u_z w_z - \zeta_v v_z w_z - \zeta_w w_z^2.\end{aligned} \tag{3.74i}$$

Étape 6 : Remplacer les coefficients et simplifier.

De (3.70), nous avons

$$w_z = -u_x - v_y + u^2 + v^2 + w^2 - q, \tag{3.75a}$$

$$w_y = v_z, \tag{3.75b}$$

$$w_x = u_z, \tag{3.75c}$$

$$v_x = u_y. \tag{3.75d}$$

Ainsi, de (3.73),(3.74) et (3.75), nous pouvons réduire (3.73) pour E_1, E_2, E_3 et E_4. Étant donné la longueur du résultat, celui-ci n'est pas donné ici.

Étape 7 : Obtenir les équations déterminantes.

En isolant séparément les différentes dérivées de u et v, nous obtenons les équations déterminantes suivantes pour E_1 :

$$\varphi_x + \psi_y + \chi_z + (\chi_w - \zeta_z)(u^2 + v^2 + w^2 - q) - \zeta_w(u^2 + v^2 + w^2 - q)^2 \tag{3.76a}$$

$$-2u\varphi - 2v\psi - 2w\chi + \xi q_x + \eta q_y + \zeta q_z = 0, \tag{3.76b}$$

$$\varphi_u - \chi_w + \zeta_z - \xi_x + 2\zeta_w(u^2 + v^2 + w^2 - q) = 0, \tag{3.76c}$$

$$\varphi_v + \psi_u - \xi_y - \eta_x = 0, \tag{3.76d}$$

$$\varphi_w + \chi_u - \xi_z - \zeta_x - (\xi_w + \zeta_u)(u^2 + v^2 + w^2 - q) = 0, \tag{3.76e}$$

$$\psi_v - \chi_w + \zeta_z - \eta_y + 2\zeta_w(u^2 + v^2 + w^2 - q) = 0, \tag{3.76f}$$

$$\psi_w + \chi_v - \eta_z - \zeta_y - (\eta_w + \zeta_v)(u^2 + v^2 + w^2 - q) = 0, \tag{3.76g}$$

$$\xi_u + \eta_v = 0, \tag{3.76h}$$

$$\xi_u + \zeta_w = 0, \tag{3.76i}$$

$$\xi_v + \eta_u = 0, \tag{3.76j}$$

$$\xi_w + \zeta_u = 0, \tag{3.76k}$$

$$\eta_v + \zeta_w = 0, \tag{3.76l}$$

$$\eta_w + \zeta_v = 0, \tag{3.76m}$$

$$\zeta_w = 0. \tag{3.76n}$$

Le même type de résultat est obtenu pour E_2, E_3 et E_4.

Étape 8 : Trouver la solution générale.

Des équations déterminantes, comme pour l'équation d'Euler, nous remarquons que la symétrie est projetable, c.-à-d. que ξ, η et ζ dépendent uniquement de x, y et z. Ainsi, l'équation à résoudre est

$$\begin{aligned} &\varphi_x + \psi_y + \chi_z + (\varphi_u - \xi_x)(u^2 + v^2 + w^2 - q) \\ &- 2u\varphi - 2v\psi - 2w\chi + \xi q_x + \eta q_y + \zeta q_z = 0, \end{aligned} \tag{3.77}$$

avec $\varphi_u = \psi_v = \chi_w$, $\varphi_v = -\psi_u = -\eta_x = \xi_y$, $\varphi_w = -\chi_u = -\zeta_x$, $\psi_w = -\chi_v = \eta_z = -\zeta_y$, $\varphi_y = \psi_x$, $\psi_z = \chi_y$, $\varphi_z = \chi_x$ et $\xi_x = \eta_y = \zeta_z$.

La solution est donnée par

$$\xi(x, y, z) = c_8(x^2 - y^2 - z^2) + 2c_9xy + 2c_{10}xz + c_7x - c_6y - c_5z + c_1, \tag{3.78a}$$

$$\eta(x, y, z) = 2c_8xy + c_9(y^2 - x^2 - z^2) + 2c_{10}yz + c_6x + c_7y - c_4z + c_2, \tag{3.78b}$$

$$\zeta(x, y, z) = 2c_8xz + 2c_9yz + c_{10}(z^2 - x^2 - y^2) + c_5x + c_4y + c_7z + c_3, \tag{3.78c}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z,u,v,w) = {} & c_8(1-2(xu+yv+zw)) + 2c_9(xv-yu) \\ & +2c_{10}(xw-zu) - c_7u - c_6v - c_5w,\end{aligned} \tag{3.78d}$$

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z,u,v,w) = {} & 2c_8(yu-xv) + c_9(1-2(xu+yv+zw)) \\ & -2c_{10}(zv-yw) + c_6u - c_7v - c_4w,\end{aligned} \tag{3.78e}$$

$$\begin{aligned}\chi(x,y,z,u,v,w) = {} & 2c_8(zu-xw) + 2c_9(zv-yw) \\ & +c_{10}(1-2(xu+yv+zw)) + c_5u + c_4v - c_7w,\end{aligned} \tag{3.78f}$$

avec

$$\begin{aligned} & -[c_8(x^2-y^2-z^2) + 2c_9xy + 2c_{10}xz + c_7x - c_6y - c_5z + c_1]q_x \\ & -[2c_8xy + c_9(y^2-x^2-z^2) + 2c_{10}yz + c_6x + c_7y - c_4z + c_2]q_y \\ & -[2c_8xz + 2c_9yz + c_{10}(z^2-x^2-y^2) + c_5x + c_4y + c_7z + c_3]q_z \\ & + 2[2c_8x + 2c_9y + 2c_{10}z + c_7]q = 0.\end{aligned} \tag{3.79}$$

Étape 9 : Trouver les symétries.

Les symétries sont données en remplaçant (3.78) dans (3.71) et en posant à tour de rôle $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $c_5 = 1$, $c_6 = 1$, $c_7 = 1$, $c_8 = 1$, $c_9 = 1$, $c_{10} = 1$, tout en maintenant les autres coefficients égaux à 0. Ainsi, nous trouvons les générateurs infinitésimaux suivants :

$$v_1 = \partial_x, \tag{3.80a}$$

$$v_2 = \partial_y, \tag{3.80b}$$

$$v_3 = \partial_z, \tag{3.80c}$$

$$v_4 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \tag{3.80d}$$

$$v_5 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \tag{3.80e}$$

$$v_6 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \tag{3.80f}$$

$$v_7 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w, \tag{3.80g}$$

$$\begin{aligned} v_8 = {} & (x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z + (1 - 2(xu + yv + zw))\partial_u \\ & + 2(yu - xv)\partial_v + 2(zu - xw)\partial_w, \end{aligned} \tag{3.80h}$$

$$\begin{aligned} v_9 = {} & 2xy\partial_x + (y^2 - x^2 - z^2)\partial_y + 2yz\partial_z + 2(xv - yu)\partial_u \\ & + (1 - 2(xu + yv + zw))\partial_v + 2(zv - yw)\partial_w, \end{aligned} \tag{3.80i}$$

$$\begin{aligned} v_{10} = {} & 2xz\partial_x + 2yz\partial_y + (z^2 - x^2 - y^2)\partial_z + 2(xw - zu)\partial_u \\ & + 2(yw - zv)\partial_v + (1 - 2(xu + yv + zw))\partial_w. \end{aligned} \tag{3.80j}$$

Ici, v_1, v_2 et v_3 sont des translations, v_4, v_5 et v_6 sont des rotations, v_7 est une dilatation, et v_8, v_9 et v_{10} sont des symétries que nous appellerons « symétries coniques ».

De plus, d'après l'équation (3.79), le type de potentiel associé à chacune de ces symétries est connu. Ainsi,

$$q_1 = F_1(y, z), \tag{3.81a}$$

$$q_2 = F_2(x, z), \tag{3.81b}$$

$$q_3 = F_3(x, y), \tag{3.81c}$$

$$q_4 = F_4\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right), \tag{3.81d}$$

$$q_5 = F_5\left(y, \sqrt{x^2 + z^2}\right), \tag{3.81e}$$

$$q_6 = F_6\left(z, \sqrt{x^2 + y^2}\right), \tag{3.81f}$$

$$q_7 = x^{-2} F_7\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \tag{3.81g}$$

$$q_8 = r^{-4} F_8\left(\frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \tag{3.81h}$$

$$q_9 = r^{-4} F_9\left(\frac{x}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \tag{3.81i}$$

$$q_{10} = r^{-4} F_{10}\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right), \tag{3.81j}$$

où q_i est le potentiel associé à v_i pour $i = 1, \ldots, 10$ et où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Étape 10 : Trouver les groupes de symétries.

En appliquant le même raisonnement que pour les exemples 3.20 et 3.21, nous trouvons les groupes de symétries suivants :

$$G_1 = (x+\varepsilon, y, z, u, v, w), \tag{3.82a}$$

$$G_2 = (x, y+\varepsilon, z, u, v, w), \tag{3.82b}$$

$$G_3 = (x, y, z+\varepsilon, u, v, w), \tag{3.82c}$$

$$\begin{aligned} G_4 = \ & (x, y\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon, z\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, u, v\cos\varepsilon + w\sin\varepsilon, \\ & w\cos\varepsilon - v\sin\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{3.82d}$$

$$\begin{aligned} G_5 = \ & (x\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon, y, z\cos\varepsilon + x\sin\varepsilon, u\cos\varepsilon - w\sin\varepsilon, v, \\ & w\cos\varepsilon + u\sin\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{3.82e}$$

$$\begin{aligned} G_6 = \ & (x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, y\cos\varepsilon - x\sin\varepsilon, z, u\cos\varepsilon + v\sin\varepsilon, \\ & v\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon, w)\,, \end{aligned} \tag{3.82f}$$

$$G_7 = \left(xe^{\varepsilon}, ye^{\varepsilon}, e^{\varepsilon}ze^{\varepsilon}, ue^{-\varepsilon}, ve^{-\varepsilon}, we^{-\varepsilon}\right), \tag{3.82g}$$

$$\begin{aligned} G_8 = \ & \left(\frac{x - r^2\varepsilon}{r^2\varepsilon^2 - 2x\varepsilon + 1}, \frac{y}{r^2\varepsilon^2 - 2x\varepsilon + 1}, \frac{z}{r^2\varepsilon^2 - 2x\varepsilon + 1},\right. \\ & u + (1 - 2(xu + yv + zw))\varepsilon - (r^2u + (1 - 2(xu + yv + zw))x)\varepsilon^2, \\ & v(r^2\varepsilon^2 - 2x\varepsilon + 1) + y(2u\varepsilon + (1 - 2(ux + yv + zw))\varepsilon^2), \\ & \left. w(r^2\varepsilon^2 - 2x\varepsilon + 1) + z(2u\varepsilon + (1 - 2(ux + yv + zw))\varepsilon^2)\right), \end{aligned} \tag{3.82h}$$

$$\begin{aligned} G_9 = \ & \left(\frac{x}{r^2\varepsilon^2 - 2y\varepsilon + 1}, \frac{y - r^2\varepsilon}{r^2\varepsilon^2 - 2y\varepsilon + 1}, \frac{z}{r^2\varepsilon^2 - 2y\varepsilon + 1},\right. \\ & u(r^2\varepsilon^2 - 2y\varepsilon + 1) + x(2v\varepsilon + (1 - 2(ux + yv + zw))\varepsilon^2), \\ & v + (1 - 2(xu + yv + zw))\varepsilon - (r^2v + (1 - 2(xu + yv + zw))y)\varepsilon^2, \\ & \left. w(r^2\varepsilon^2 - 2y\varepsilon + 1) + z(2v\varepsilon + (1 - 2(ux + yv + zw))\varepsilon^2)\right), \end{aligned} \tag{3.82i}$$

$$
\begin{aligned}
G_{10} = \Bigg(&\frac{x}{r^2\varepsilon^2 - 2z\varepsilon + 1}, \frac{y}{r^2\varepsilon^2 - 2z\varepsilon + 1}, \frac{z - r^2\varepsilon}{r^2\varepsilon^2 - 2z\varepsilon + 1}, \\
&u(r^2\varepsilon^2 - 2z\varepsilon + 1) + x(2w\varepsilon + (1 - 2(ux + yv + zw))\varepsilon^2), \\
&v(r^2\varepsilon^2 - 2z\varepsilon + 1) + y(2w\varepsilon + (1 - 2(ux + yv + zw))\varepsilon^2), \\
&w + (1 - 2(xu + yv + zw))\varepsilon - (r^2 w + (1 - 2(xu + yv + zw))z)\varepsilon^2\Bigg).
\end{aligned}
\tag{3.82j}
$$

Chapitre 4

Réduction par symétries

Dans ce chapitre, nous allons traiter de la réduction par symétries. Comme pour le chapitre précédent, nous résumerons d'abord les grandes lignes de la réduction dans une brève introduction avant d'aborder la théorie. Encore une fois, après avoir présenté la théorie, nous ferons quelques exemples (Burger, Euler, Riccati). Ici encore, les résultats concernant l'équation de Riccati sont nouveaux et ont été présentés dans [26].

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une symétrie est une transformation qui préserve les solutions. Ces solutions ont évidemment des éléments en communs, des invariants, qui ne changent pas durant la transformation. Par exemple, si la symétrie est une rotation, le rayon ne changera pas. Ainsi, le rayon est un invariant de la symétrie de rotation.

L'idée de la réduction par symétries est de diminuer le nombre de variables en utilisant les invariants. Pour ce faire, il nous faut remplacer toutes les variables par des invariants. Par la suite, nous devons résoudre la nouvelle équation et faire les substitutions inverses.

Exemple 4.1. Soit l'équation de la chaleur $u_t = u_{xx}$. Cette équation possède une symétrie de translation générée par $\partial_t + c\partial_x$ où c est une constante. Les invariants de cette symétrie sont $y = x - ct$ et $v = u$. Ainsi,

$$u_t = v_t = v_y y_t = -cv_y \quad \text{et} \quad u_{xx} = v_{xx} = v_{yy} y_x y_x = v_{yy}.$$

Par conséquent, l'équation de la chaleur devient $-cv_y = v_{yy}$ qui a pour solution $v(y) = ke^{-cy} + l$ où k et l sont des constantes. Puis, en ramenant les anciennes variables, nous trouvons $u(x,t) = ke^{-c(x-ct)} + l$.

Évidemment, la solution trouvée n'est pas la solution générale, car nous avons imposé des contraintes supplémentaires à notre solution. Toutefois, il est possible d'obtenir toutes les solutions de l'équation en répétant le même processus avec toutes les symétries. En pratique, cela est rarement nécessaire, car bien souvent nous avons simplement besoin d'une seule solution.

4.2 Théorie

Dans cette section, nous allons seulement présenter une partie de la théorie qui nous permet de faire la réduction par symétrie. En effet, nous allons voir uniquement comment trouver les invariants d'une symétrie et la procédure pour faire la réduction par symétries. Toutefois, pour le lecteur intéressé, le reste de la théorie qui entoure la réduction par symétries se trouve dans [24].

4.2.1 Construction des invariants

Pour faire la réduction par symétries, nous avons besoin de trouver les invariants d'une symétrie. Nous utiliserons ici plusieurs éléments du chapitre 3.

Soit G un groupe de transformation à un paramètre qui agit sur une variété M qui a comme générateur infinitésimal

$$\boldsymbol{v} = \xi_1 \partial_{x_1} + \ldots + \xi_n \partial_{x_n}. \tag{4.1}$$

D'après le théorème 3.30 du chapitre 3, un invariant $f(x)$ de G est une solution de l'équation différentielle

$$\boldsymbol{v}(f) = \xi_1 \partial_{x_1} f + \ldots + \xi_n \partial_{x_n} f = 0. \tag{4.2}$$

La théorie des équations différentielles nous dit alors que pour trouver la solution de l'équation (4.2), nous devons résoudre son système caractéristique

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n(x)}. \tag{4.3}$$

La solution générale de l'équation (4.3) est de la forme

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1} \tag{4.4}$$

où les c_i sont les constantes d'intégration et où les fonctions f_i sont les invariants recherchés.

Exemple 4.2. Soit le groupe de rotation $SO(2)$

$$(x, y) \mapsto (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon < 2\pi.$$

Le générateur infinitésimal du groupe est donné par

$$\boldsymbol{v} = -y\partial_x + x\partial_y.$$

Ainsi, son système caractéristique est

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}.$$

La solution est donné par $c = x^2 + y^2$. Ainsi, $f(x, y) = x^2 + y^2$ est un invariant du groupe $SO(2)$

Remarque 4.3. *Évidemment, toutes les fonctions d'invariants sont aussi des invariants. Ainsi, nous aurions pu prendre $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ comme invariant pour le groupe $S0(2)$.*

4.2.2 Réduction par symétries

Maintenant que nous sommes en mesure d'obtenir les invariants d'une symétrie, il nous reste à faire la réduction par symétries.

Considérons $\Delta(x, u^{(n)})$ un système d'équations différentielles avec p variables indépendantes $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et q variables dépendantes $u = (u_1, \ldots, u_q)$. Si G est un groupe de symétries du système, alors d'après la définition 3.25, une solution $u = f(x)$ sera invariante sous l'action de n'importe quelle transformation $g \in G$. De plus, en faisant quelques suppositions supplémentaires, il est possible de trouver toutes les solutions invariantes de Δ en solutionnant le système réduit Δ/G qui fait intervenir moins de variables indépendantes que le système Δ. Un théorème, que nous ne traiterons pas ici, nous assure que le système possède $p - s$ invariants indépendants $y(x)$ et q invariants dépendants $v(x, u)$. Ici, s est la dimension de l'orbite de G.

Pour passer du système initial $\Delta(x, u^{(n)})$ au système réduit, nous devons récrire le système en fonction des invariants trouvés. Initialement, une solution $u = f(x)$ dépendait uniquement des variables indépendantes $(x_1, \ldots, x_p)$. En utilisant les invariants, nous pouvons réexprimer une partie des variables indépendantes $(x_1, \ldots, x_{p-s})$ en fonction des invariants y. Toutefois, il nous reste encore s variables indépendantes que nous devons garder $\hat{x} = (x_{p-s+1}, \ldots, x_p)$. Ainsi, nous avons $u = \delta(\hat{x}, y, v)$. Finalement, pour avoir un système qui dépend uniquement des nouvelles variables $\hat{x}$, y ,v, nous devons utiliser la règle de la dérivation en chaîne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\delta(\hat{x}, y, v) = \frac{\partial \delta}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{4.5}$$

et nous devons remplacer toutes les anciennes variables x et u par les nouvelles variables $\hat{x}$, y et v. Notre nouveau système devrait donc avoir la forme $\tilde{\Delta}(\hat{x}, y, v^{(n)})$. Toutefois, puisque G est un groupe de symétries du système Δ, le système $\tilde{\Delta}$ est équivalent au système réduit $(\Delta/G)(y, v^{(n)})$ qui ne dépend plus de $\hat{x}$. Finalement, une solution $v(y)$ du système réduit Δ/G est aussi une solution du système Δ lorsque nous faisons les transformations inverses.

4.3 Exemples

Dans cette section, nous allons appliquer la réduction par symétries pour les trois équations que nous avons vu au chapitre 3, soit l'équation de Burger, l'équation d'Euler et l'équation de Riccati quaternionique. Notons que le deuxième exemple vient directement de [24] et que le troisième exemple reprend les résultats obtenus dans [26].

4.3.1 Équation de Burger

Dans l'équation de Burger

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{3.34}$$

nous avons obtenu les symétries suivantes :

$$v_1 = \partial_x, \tag{3.56a}$$

$$v_2 = \partial_t, \tag{3.56b}$$

$$v_3 = \partial_u, \tag{3.56c}$$

$$v_4 = x\partial_x + 2t\partial_t, \tag{3.56d}$$

$$v_5 = 2t\partial_x - x\partial_u, \tag{3.56e}$$

$$v_6 = 4xt\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)\partial_u, \tag{3.56f}$$

$$v_k = k(x,t)e^{-u}\partial_u. \tag{3.56g}$$

Toutefois, pour cet exemple, nous allons nous intéresser uniquement à la symétrie de dilatation engendrée par v_4.

Calcul des invariants

Calculons les invariants de v_4, la symétrie de dilatation.

De (4.3), nous avons

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{du}{0}. \tag{4.6}$$

De cette équation, nous avons

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln t + \ln c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{x}{\sqrt{t}} \tag{4.7a}$$

et

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{0} \Leftrightarrow c_2 = u. \tag{4.7b}$$

Ainsi, les invariants de cette symétrie sont donnés par

$$y = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad \text{et } v = u. \tag{4.8}$$

Réduction par symétries

Notre équation de départ est $u_t = u_{xx} + u_x^2$.

Calculons u, u_t, u_x et u_{xx} en fonction des nouvelles variables (y et v) et de l'ancienne variable t qui devrait s'annuler plus loin.

$$\begin{aligned} u &= v, \\ u_t &= v_t = v_y y_t = -\frac{1}{2} x t^{-\frac{3}{2}} v_y = -\frac{y}{2t} v_y, \\ u_x &= v_x = v_y y_x = \frac{1}{\sqrt{t}} v_y, \\ u_{xx} &= \left(\frac{1}{\sqrt{t}} v_y\right)_x = \frac{1}{\sqrt{t}} v_{yy} y_x = \frac{1}{t} v_{yy}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En effectuant la substitution dans l'équation de départ, nous avons

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 \Leftrightarrow -\frac{y}{2t} v_y = \frac{1}{t} v_{yy} + \frac{1}{t} v_y^2 \Leftrightarrow v_{yy} + v_y^2 + \frac{y}{2} v_y = 0. \tag{4.10}$$

En posant $z := v_y$ dans la dernière équation, nous obtenons l'équation non linéaire de Bernouilli suivante :

$$z(y)' + z(y)^2 + \frac{y}{2} z(y) = 0. \tag{4.11}$$

Ainsi, à partir d'une solution $z(y)$ de l'équation (4.11), il nous suffit de faire les transformations inverses

$$u = v = \int z(y)dy \quad \text{avec} \quad y = \frac{x}{\sqrt{t}} \tag{4.12}$$

pour obtenir une solution de l'équation de Burger (3.34).

4.3.2 Équation d'Euler

Dans l'équation d'Euler [24]

$$E_1 \equiv u_t + uu_x + vu_y + wu_z + p_x = 0, \tag{3.59a}$$

$$E_2 \equiv v_t + uv_x + vv_y + wv_z + p_y = 0, \tag{3.59b}$$

$$E_3 \equiv w_t + uw_x + vw_y + ww_z + p_z = 0, \tag{3.59c}$$

$$E_4 \equiv u_x + v_y + w_z = 0. \tag{3.59d}$$

nous avons obtenu les symétries suivantes :

$$v_1 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \tag{3.67a}$$

$$v_2 = x\partial_z - z\partial_x + u\partial_w - w\partial_u, \tag{3.67b}$$

$$v_3 = z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w, \tag{3.67c}$$

$$v_4 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2p\partial_p, \tag{3.67d}$$

$$v_5 = \partial_t, \tag{3.67e}$$

$$v_6 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t, \tag{3.67f}$$

$$v_\alpha = \alpha\partial_x + \alpha_t\partial_u - \alpha_{tt}x\partial_p, \tag{3.67g}$$

$$v_\beta = \beta\partial_y + \beta_t\partial_v - \beta_{tt}y\partial_p, \tag{3.67h}$$

$$v_\gamma = \gamma\partial_z + \gamma_t\partial_w - \gamma_{tt}z\partial_p, \tag{3.67i}$$

$$v_\theta = \theta\partial_p. \tag{3.67j}$$

Encore une fois, pour cet exemple, nous allons nous intéresser uniquement à la symétrie engendrée par v_β. Toutefois, comme l'équation tridimensionnelle reste assez compliquée, nous traiterons uniquement le cas bidimensionnel. Ainsi, $z = 0$ et $w = 0$ et les équations (3.59) deviennent

$$E_1 \equiv u_t + uu_x + vu_y + p_x = 0, \tag{4.13a}$$

$$E_2 \equiv v_t + uv_x + vv_y + p_y = 0, \tag{4.13b}$$

$$E_3 \equiv u_x + v_y = 0. \tag{4.13c}$$

Calcul des invariants

Calculons les invariants de v_β.

De (4.3), nous avons

$$\frac{dy}{\beta} = \frac{dv}{\beta_t} = \frac{dp}{-\beta_{tt}y} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0} = \frac{dx}{0}. \tag{4.14}$$

De cette équation, nous avons

$$c_1 = t, \tag{4.15a}$$

$$c_2 = u, \tag{4.15b}$$

$$c_3 = x, \tag{4.15c}$$

$$\frac{dy}{\beta} = \frac{dv}{\beta_t} \Leftrightarrow \beta_t dy = \beta dv \Leftrightarrow \beta_t y = \beta v + c \Leftrightarrow c_4 = v - \frac{\beta_t}{\beta} y \tag{4.15d}$$

et

$$\frac{dy}{\beta} = \frac{dp}{-\beta_{tt}y} \Leftrightarrow -\beta_{tt} y dy = \beta dp \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\beta_{tt}y^2 = \beta p + c \Leftrightarrow c_5 = p + \frac{\beta_{tt}}{2\beta}y^2. \tag{4.15e}$$

Ainsi, les invariants de cette symétrie sont donnés par x, t, u, $r = v - \frac{\beta_t}{\beta}y$ et $s =$

$p + \frac{\beta_{tt}}{2\beta} y^2$.

Réduction par symétries

Calculons u, u_t, u_x, u_y, v, v_t, v_x, v_y, p, p_x et p_y en fonction des nouvelles variables et de l'ancienne variable y qui devrait s'annuler plus loin.

$$u = u, \tag{4.16a}$$

$$u_t = u_t, \tag{4.16b}$$

$$u_x = u_x, \tag{4.16c}$$

$$u_y = u_r r_y + u_s s_y = -u_r \frac{\beta_t}{\beta} + u_s \frac{\beta_{tt}}{\beta} y = 0, \tag{4.16d}$$

$$v = r + \frac{\beta_t}{\beta} y, \tag{4.16e}$$

$$v_t = \left(r + \frac{\beta_t}{\beta} y \right)_t = r_t + \frac{\beta_{tt}\beta - \beta_t \beta_t}{\beta^2} y, \tag{4.16f}$$

$$v_x = \left(r + \frac{\beta_t}{\beta} y \right)_x = r_x, \tag{4.16g}$$

$$v_y = \left(r + \frac{\beta_t}{\beta} y \right)_y = r_s s_y + \frac{\beta_t}{\beta} = \frac{\beta_t}{\beta}, \tag{4.16h}$$

$$p = s - \frac{\beta_{tt}}{2\beta} y^2, \tag{4.16i}$$

$$p_x = \left(s - \frac{\beta_{tt}}{2\beta} y^2 \right)_x = s_x, \tag{4.16j}$$

$$p_y = \left(s - \frac{\beta_{tt}}{2\beta} y^2 \right)_y = s_r r_y - \frac{\beta_{tt}}{\beta} y = -\frac{\beta_{tt}}{\beta} y. \tag{4.16k}$$

Remarque 4.4. *Notons que $u_r = u_s = r_s = s_r = 0$, car r et s sont des invariants dépendants.*

En effectuant la substitution dans l'équation de départ, nous avons

$$E_1 \equiv u_t + uu_x + vu_y + p_x = 0 \Leftrightarrow u_t + uu_x + s_x = 0, \tag{4.17a}$$

$$E_2 \equiv v_t + uv_x + vv_y + p_y = 0 \Leftrightarrow r_t + ur_x + r\frac{\beta_t}{\beta} = 0, \tag{4.17b}$$

$$E_3 \equiv u_x + v_y = 0 \Leftrightarrow u_x + \frac{\beta_t}{\beta} = 0. \tag{4.17c}$$

La solution de ce nouveau système est donnée par

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\beta_t x + \sigma_t}{\beta}, \\ r &= \frac{h(\beta x - \sigma)}{\beta}, \\ s &= \frac{(\frac{1}{2}\beta\beta_{tt} - \beta_t^2)x^2 + (2\beta_t\sigma_t - \beta\sigma_{tt})x + \tau}{\beta^2}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

où σ et τ sont des fonctions arbitraires de t et où h est une fonction arbitraire de $\beta x - \sigma$.

En faisant les transformations inverses, nous obtenons

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\beta_t x + \sigma_t}{\beta}, \\ v &= \frac{\beta_t y + h(\beta x - \sigma)}{\beta}, \\ p &= \frac{(\frac{1}{2}\beta\beta_{tt} - \beta_t^2)x^2 - \frac{1}{2}\beta\beta_{tt}y^2 + (2\beta_t\sigma_t - \beta\sigma_{tt})x + \tau}{\beta^2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

De plus, si nous posons $\beta = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} u &= \sigma_t, \\ v &= h(x - \sigma), \\ p &= -\sigma_{tt}x + \tau. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Maintenant, en ramenant w dans notre système, nous trouvons

$$w_t + uw_x + vw_y = 0 \Leftrightarrow w = H(x - \sigma, y - th(x - \sigma)). \tag{4.21}$$

Notons que si nous avions voulu faire une réduction par rapport à v_α en plus de v_β, à moins de poser $\alpha(t) = \frac{k}{\beta(t)}$ où k est une constante, le système réduit obtenu aurait été inconsistant et nous n'aurions trouvé aucune solution [24].

4.3.3 Équation de Riccati quaternionique

Dans l'équation de Riccati quaternionique [26]

$$D\boldsymbol{Q} + |\boldsymbol{Q}|^2 = q. \tag{3.69}$$

qui est équivalente au système d'équations

$$E_1 \equiv -(u_x + v_y + w_z) + u^2 + v^2 + w^2 = q, \tag{3.70a}$$

$$E_2 \equiv w_y - v_z = 0, \tag{3.70b}$$

$$E_3 \equiv u_z - w_x = 0, \tag{3.70c}$$

$$E_4 \equiv v_x - u_y = 0, \tag{3.70d}$$

nous avons obtenu les symétries suivantes :

$$v_1 = \partial_x, \tag{3.80a}$$

$$v_2 = \partial_y, \tag{3.80b}$$

$$v_3 = \partial_z, \tag{3.80c}$$

$$v_4 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \tag{3.80d}$$

$$v_5 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \tag{3.80e}$$

$$v_6 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \tag{3.80f}$$

$$v_7 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w, \tag{3.80g}$$

$$\begin{aligned} v_8 = {} & (x^2 - y^2 - z^2)\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z + (1 - 2(xu + yv + zw))\partial_u \\ & +2(yu - xv)\partial_v + 2(zu - xw)\partial_w, \end{aligned} \tag{3.80h}$$

$$\begin{aligned} v_9 = {} & 2xy\partial_x + (y^2 - x^2 - z^2)\partial_y + 2yz\partial_z + 2(xv - yu)\partial_u \\ & +(1 - 2(xu + yv + zw))\partial_v + 2(zv - yw)\partial_w, \end{aligned} \tag{3.80i}$$

$$\begin{aligned} v_{10} = {} & 2xz\partial_x + 2yz\partial_y + (z^2 - x^2 - y^2)\partial_z + 2(xw - zu)\partial_u \\ & +2(yw - zv)\partial_v + (1 - 2(xu + yv + zw))\partial_w. \end{aligned} \tag{3.80j}$$

Pour cette équation, nous ferons d'abord une réduction par symétries en utilisant la symétrie de rotation v_6 et la symétrie de translation v_3. Puis, nous referons le même processus, mais avec la symétrie « conique » v_{10}.

Invariants de la symétrie de rotation

Calculons les invariants de v_6, la symétrie de rotation autour de l'axe des z et de l'axe des w.

De (4.3), nous avons

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{-v} = \frac{dv}{u} = \frac{dz}{0} = \frac{dw}{0}, \tag{4.22}$$

et de cette équation, nous avons

$$c_1 = z, \tag{4.23a}$$

$$c_2 = w, \tag{4.23b}$$

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Leftrightarrow xdx = -ydy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c_3, \tag{4.23c}$$

$$\frac{du}{-v} = \frac{dv}{u} \Leftrightarrow udu = -vdv \Leftrightarrow u^2 + v^2 = c_4. \tag{4.23d}$$

et nous devons encore résoudre $\frac{dy}{x} = -\frac{du}{v}$.

En posant $y = \rho \sin\theta$ et $u = R\cos\varphi$, où $\rho = \sqrt{c_3} = \sqrt{x^2+y^2}$ et $R = \sqrt{c_4} = \sqrt{u^2+v^2}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dy}{x} = -\frac{du}{v} &\Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{\rho^2 - y^2}} = -\frac{du}{\sqrt{R^2-u^2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\rho\cos\theta d\theta}{\sqrt{\rho^2 - \rho^2\sin^2\theta}} = \frac{R\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 - R^2\cos^2\varphi}} \\ &\Leftrightarrow d\theta = d\varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi - \theta = c_5.\end{aligned} \tag{4.23e}$$

Maintenant, en posant $\hat{u} = R\cos I$ et $\hat{v} = R\sin I$, où $I = c_5 = \varphi - \theta$, nous avons

$$u = R\cos\varphi = R\cos(I+\theta) = R(\cos I\cos\theta - \sin I\sin\theta) = \hat{u}\cos\theta - \hat{v}\sin\theta \tag{4.24}$$

et

$$v = R\sin\varphi = R\sin(I+\theta) = R(\sin I\cos\theta + \cos I\sin\theta) = \hat{u}\sin\theta + \hat{v}\cos\theta. \tag{4.25}$$

Puis, en isolant $\hat{v}$ dans (4.24) et en remplaçant dans (4.25) nous trouvons

$$\hat{u} = u\cos\theta + v\sin\theta. \tag{4.26}$$

De même, en isolant $\hat{u}$ dans (4.24) et en remplaçant dans (4.25) nous trouvons

$$\hat{v} = -u\sin\theta + v\cos\theta. \tag{4.27}$$

Ainsi, les invariants de cette symétrie sont donnés par z, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\hat{w} = w$, $\hat{u} = u\cos\theta + v\sin\theta$ et $\hat{v} = -u\sin\theta + v\cos\theta$.

Réduction par symétries utilisant la symétrie de rotation

Calculons u, u_x, u_y, u_z v, v_x, v_y, v_z, w, w_x, w_y et w_z en fonction des nouvelles variables et de l'ancienne variable y qui devrait s'annuler plus loin. Afin d'éviter la lourdeur, nous allons uniquement détailler le calcul de u_x.

$$\begin{aligned}
u_x &= (\hat{u}\cos\theta - \hat{v}\sin\theta)_x \\
&= \hat{u}_x\cos\theta + \hat{u}(\cos\theta)_x - \hat{v}_x\sin\theta - \hat{v}(\sin\theta)_x \\
&= \hat{u}_\rho\rho_x\cos\theta + \hat{u}\left(\frac{x}{\rho}\right)_x - \hat{v}_\rho\rho_x\sin\theta - \hat{v}\left(\frac{y}{\rho}\right)_x \\
&= \hat{u}_\rho\frac{x}{\rho}\cos\theta + \hat{u}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right) - \hat{v}_\rho\frac{x}{\rho}\sin\theta + \hat{v}\left(\frac{xy}{\rho^3}\right) \\
&= \hat{u}_\rho\cos^2\theta + \hat{u}\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\rho}\right) - \hat{v}_\rho\cos\theta\sin\theta + \hat{v}\left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}\right) \\
&= \hat{u}_\rho\cos^2\theta - \hat{v}_\rho\cos\theta\sin\theta + \frac{\hat{u}\sin^2\theta + \hat{v}\sin\theta\cos\theta}{\rho}.
\end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement aux autres variables, nous obtenons

$$u = \hat{u}\cos\theta - \hat{v}\sin\theta, \tag{4.28a}$$

$$u_x = \hat{u}_\rho\cos^2\theta - \hat{v}_\rho\sin\theta\cos\theta + \frac{\hat{u}\sin^2\theta + \hat{v}\sin\theta\cos\theta}{\rho}, \tag{4.28b}$$

$$u_y = \hat{u}_\rho\sin\theta\cos\theta - \hat{v}_\rho\sin^2\theta - \frac{\hat{u}\sin\theta\cos\theta + \hat{v}\cos^2\theta}{\rho}, \tag{4.28c}$$

$$u_z = \hat{u}_z\cos\theta - \hat{v}_z\sin\theta, \tag{4.28d}$$

$$v = \hat{u}\sin\theta + \hat{v}\cos\theta, \tag{4.28e}$$

$$v_x = \hat{u}_\rho\sin\theta\cos\theta + \hat{v}_\rho\cos^2\theta - \frac{\hat{u}\sin\theta\cos\theta - \hat{v}\sin^2\theta}{\rho}, \tag{4.28f}$$

$$v_y = \hat{u}_\rho\sin^2\theta + \hat{v}_\rho\sin\theta\cos\theta + \frac{\hat{u}\cos^2\theta - \hat{v}\sin\theta\cos\theta}{\rho}, \tag{4.28g}$$

$$v_z = \hat{u}_z\sin\theta + \hat{v}_z\cos\theta, \tag{4.28h}$$

$$w = \hat{w}, \tag{4.28i}$$

$$w_x = \hat{w}_\rho\cos\theta, \tag{4.28j}$$

$$w_y = \hat{w}_\rho \sin\theta, \tag{4.28k}$$

$$w_z = \hat{w}_z. \tag{4.28l}$$

En effectuant la substitution dans le système initial,après les simplifications, nous obtenons

$$E_1 \equiv -\left(\hat{u}_\rho + \frac{\hat{u}}{\rho} + \hat{w}_z\right) + \hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2 = q, \tag{4.29a}$$

$$E_2 \equiv \hat{v}_z + \tan\theta\,(\hat{u}_z - \hat{w}_\rho) = 0, \tag{4.29b}$$

$$E_3 \equiv \hat{u}_z - \hat{w}_\rho - \tan\theta(\hat{v}_z) = 0, \tag{4.29c}$$

$$E_4 \equiv \hat{v}_\rho + \frac{\hat{v}}{\rho} = 0. \tag{4.29d}$$

Toutefois, en mettant (4.29b) et (4.29c) ensemble, nous avons

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_z = -\tan\theta\,(\hat{u}_z - \hat{w}_\rho)\\
&\Rightarrow \hat{u}_z - \hat{w}_\rho - \tan\theta(\hat{v}_z) = 0\\
&\Leftrightarrow \hat{u}_z - \hat{w}_\rho + \tan^2\theta\,(\hat{u}_z - \hat{w}_\rho) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(1 + \tan^2\theta\right)(\hat{u}_z - \hat{w}_\rho) = 0\\
&\Rightarrow \hat{u}_z - \hat{w}_\rho = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

et

$$\begin{aligned}
&\hat{u}_z - \hat{w}_\rho = \tan\theta(\hat{v}_z)\\
&\Rightarrow \hat{v}_z + \tan\theta\,(\hat{u}_z - \hat{w}_\rho) = 0\\
&\Leftrightarrow \hat{v}_z + \tan^2\theta(\hat{v}_z) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(1 + \tan^2\theta\right)\hat{v}_z = 0\\
&\Rightarrow \hat{v}_z = 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

De (4.31) et (4.29d), nous avons $\hat{v} = \frac{c_1}{\rho}$ où c_1 est une constante réelle et de (4.30), nous avons $\hat{u}_z = \hat{w}_\rho$. Avec ces informations, nous devons trouver la solution de (4.29a).

Malheureusement, il nous manque encore des informations pour pouvoir résoudre l'équation (4.29a). Notons qu'en utilisant Maple 16 et qu'en supposant un potentiel $q = \frac{k^2}{\rho^2}$ où k est une constante, une solution faisant intervenir plusieurs fonctions de Bessel est possible. Toutefois, dans les faits, cette solution n'est pas très utile, car elle est difficilement manipulable.

Toutefois, en appliquant la symétrie de translation $v_3 = \partial_z$ qui implique une invariance en z, nous avons que $\hat{u}$ et $\hat{w}$ ne dépendent pas de z. Par conséquent, de (4.30), nous avons $\hat{u}_z = \hat{w}_\rho = 0$. Donc, $\hat{w} = c_2$ où c_2 est une constante réelle. Ainsi l'équation à résoudre devient

$$-\left(\hat{u}_\rho + \frac{\hat{u}}{\rho}\right) + \hat{u}^2 + \left(\frac{c_1}{\rho}\right)^2 + c_2^2 = q \tag{4.32}$$

qui est équivalente à l'équation de Riccati

$$\hat{u}_\rho - \hat{u}^2 + \frac{\hat{u}}{\rho} - \left(\frac{c_1}{\rho}\right)^2 - c_2^2 + q = 0. \tag{4.33}$$

En supposant $c_1 = c_2 = 0$ et $q = \frac{k^2}{\rho^2}$ où k est une constante réelle,[i] alors la solution de (4.33) est donnée par

$$\hat{u}(\rho) = -\frac{k\left(\rho^{2k} + e^{2ck}\right)}{\rho\left(\rho^{2k} - e^{2ck}\right)} \tag{4.34}$$

où c est une constante arbitraire. Ainsi une solution de notre système réduit est

$$\begin{aligned} \hat{u} &= -\frac{k\left(\rho^{2k} + e^{2ck}\right)}{\rho\left(\rho^{2k} - e^{2ck}\right)}, \\ \hat{v} &= 0, \\ \hat{w} &= 0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

i. D'autres conditions ont été testées dans Maple 16.

En faisant les opérations inverses, c.-à-d.

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\hat{u}x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\hat{v}y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\
v &= \frac{\hat{u}y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\hat{v}x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\
w &= \hat{w},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
u &= \frac{-kx\left[(x^2+y^2)^k + e^{2ck}\right]}{(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^k - e^{2ck}\right]}, \\
v &= \frac{-ky\left[(x^2+y^2)^k + e^{2ck}\right]}{(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^k - e^{2ck}\right]}, \\
w &= 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Ainsi, une solution de l'équation de départ (3.69) avec $q = \frac{k^2}{x^2+y^2}$ est

$$\boldsymbol{Q} = \frac{-kx\left[(x^2+y^2)^k + e^{2ck}\right]}{(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^k - e^{2ck}\right]} e_1 + \frac{-ky\left[(x^2+y^2)^k + e^{2ck}\right]}{(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^k - e^{2ck}\right]} e_2. \tag{4.38}$$

Solution à l'équation de Schrödinger

D'après le chapitre 2, du théorème 2.66, nous savons que si nous possédons une solution de l'équation de Riccati (3.69), alors nous pouvons obtenir une solution de l'équation de Schrödinger (2.12). Par conséquence, une solution de l'équation $\left(-\Delta + \frac{k^2}{x^2+y^2}\right)\psi(x,y,z) = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\psi(x,y,z) &= \exp\left(-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]\right)\\
&= \exp\left(-\int_1^x u(\xi,0,0)d\xi - \int_0^y v(x,\eta,0)d\eta - \int_0^z w(x,y,\zeta)d\zeta + \ln C\right)\\
&= \exp\left(-\int_1^x \frac{-k\xi\left(\xi^{2k}+e^{2ck}\right)}{\xi^2\left(\xi^{2k}-e^{2ck}\right)}d\xi\right)\\
&\quad\cdot\exp\left(-\int_0^y \frac{-k\eta\left[(x^2+\eta^2)^k+e^{2ck}\right]}{(x^2+\eta^2)\left[(x^2+\eta^2)^k-e^{2ck}\right]}d\eta\right)\\
&\quad\cdot\exp\left(-\int_0^z 0d\zeta\right)\\
&\quad\cdot\exp\left(\ln C\right)\\
&= \frac{(e^{2ck}-x^{2k})[e^{2ck}-(x^2+y^2)^k]x^k}{x^k(e^{2ck}-1)(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}(e^{2ck}-x^{2k})}\cdot C\\
&= \frac{C\left[(x^2+y^2)^k-e^{2ck}\right]}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}(1-e^{2ck})}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Ainsi,

$$\psi(x,y,z) = \frac{C\left[(x^2+y^2)^k-e^{2ck}\right]}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}(1-e^{2ck})} \tag{4.40}$$

est une solution de l'équation de Schrödinger lorsque $q = \frac{k^2}{x^2+y^2}$.

Invariants de la symétrie conique

Calculons les invariants de v_{10}, une symétrie conique qui est loin d'être triviale.

De (4.3), nous avons

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{2dz}{z^2-(x^2+y^2)} = \frac{du}{xw-zu} = \frac{dv}{yw-zv} = \frac{dw}{\frac{1}{2}-(xu+yv+zw)}. \tag{4.41}$$

Pour calculer les invariants des variables indépendantes, nous allons utiliser les coordonnées cylindriques. Ainsi, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = \rho\cot\varphi$ où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,

$\theta = \arctan \frac{y}{x}$ et $\varphi = \arctan \frac{\rho}{z}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta d\rho - \rho \sin\theta d\theta, \\ dy &= \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta, \\ dz &= \cot\varphi d\rho - \rho \csc^2 \varphi d\varphi. \end{aligned} \tag{4.42}$$

À partir de cette transformation, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta}{\rho\cos\theta\rho\cot\varphi} = \frac{\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta}{\rho\sin\theta\rho\cot\varphi} \\ \Leftrightarrow\ & d\rho - \rho\tan\theta d\theta = d\rho + \rho\cot\theta d\theta \\ \Leftrightarrow\ & 0 = \rho d\theta \\ \Leftrightarrow\ & c_1 = \theta \\ \Leftrightarrow\ & c_1 = \arctan\frac{y}{x} \end{aligned} \tag{4.43a}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{yz} = \frac{2dz}{z^2 - (x^2+y^2)} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta}{\rho\sin\theta\rho\cot\varphi} = \frac{2(\cot\varphi d\rho - \rho\csc^2\varphi d\varphi)}{(\rho\cot\varphi)^2 - \rho^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d\rho}{\cot\varphi} = \frac{2(\cot\varphi d\rho - \rho\csc^2\varphi d\varphi)}{\cot^2\varphi - 1} \\ \Leftrightarrow\ & (\cot^2\varphi + 1)d\rho = 2\rho\csc^2\varphi\cot\varphi d\varphi \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d\rho}{2\rho} = \cot\varphi d\varphi \\ \Leftrightarrow\ & \ln\sqrt{\rho} = -\ln|\csc\varphi| + \ln\sqrt{c_2} \\ \Leftrightarrow\ & c_2 = \rho\csc^2\varphi \\ \Leftrightarrow\ & c_2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned} \tag{4.43b}$$

En manipulant ces deux constantes, nous trouvons comme invariants $s = \frac{x}{r^2}$ et $t = \frac{y}{r^2}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Nous devons maintenant trouver les invariants du système suivant :

$$dx = \frac{xzdu}{xw - zu} = \frac{xzdv}{yw - zv} = \frac{xzdw}{\frac{1}{2} - xu - yv - zw}. \tag{4.44}$$

De ce système, nous avons $v = \frac{t}{s}u$. Puis en remplaçant x, y et z par leur équivalence respective sr^2, tr^2 et $r\sqrt{1 - s^2r^2 - t^2r^2}$, le système devient

$$dr = \frac{du}{\frac{2sw}{\sqrt{1-r^2s^2-r^2t^2}} - \frac{2u}{r}} = \frac{dw}{\frac{1}{r^2\sqrt{1-r^2s^2-r^2t^2}} - \frac{2(s+\frac{t^2}{s})u}{\sqrt{1-r^2s^2-r^2t^2}} - \frac{2w}{r}}. \tag{4.45}$$

La solution de ce système est

$$u(x) = -\frac{1 - 2r^2(s^2 + t^2)}{r^2}c_3 + \frac{\sqrt{1 - r^2(s^2 + t^2)}}{r}ic_4 + s \tag{4.46a}$$

et

$$w(x) = \frac{2(s^2 + t^2)\sqrt{1 - r^2(s^2 + t^2)}}{sr}c_3 + \frac{1 - 2r^2(s^2 + t^2)}{2r^2s}ic_4 + \frac{\sqrt{1 - r^2(s^2 + t^2)}}{r}. \tag{4.46b}$$

Finalement, en isolant c_3 et c_4 et en ramenant les expressions en termes de x ,y et z, nous trouvons les deux derniers invariants

$$\begin{aligned} U = c_3 = & -r^2(1 - 2r^2(s^2 + t^2))u + 2r^3s\sqrt{1 - r^2(s^2 + t^2)}w - r^2s \\ & = (x^2 + y^2 - z^2)u + (2xz)w - x \end{aligned} \tag{4.47a}$$

et

$$\begin{aligned} V = c_4 = i & \left[-4r^3(s^2 + t^2)\sqrt{1 - r^2(s^2 + t^2)}u - 2r^2s(1 - 2r^2(s^2 + t^2))w \right. \\ & \left. +2rs\sqrt{1 - r^2(s^2 + t^2)}\right] \\ = i & \left[\frac{-4z(x^2 + y^2)}{r^2}u + \frac{2x}{r^2}\left(x^2 + y^2 - z^2\right)w + \frac{2xz}{r^2}\right]. \end{aligned} \tag{4.47b}$$

Ainsi, les invariants de notre symétrie sont

$$s = \frac{x}{r^2}, \tag{4.48a}$$

$$t = \frac{y}{r^2}, \tag{4.48b}$$

$$U = (x^2 + y^2 - z^2)u + (2xz)w - x, \tag{4.48c}$$

$$V = i\left[\frac{-4z(x^2+y^2)}{r^2}u + \frac{2x}{r^2}\left(x^2+y^2-z^2\right)w + \frac{2xz}{r^2}\right]. \tag{4.48d}$$

Réduction par symétries utilisant la symétrie conique

Nous devons maintenant définir u, u_x, u_y, u_z v, v_x, v_y, v_z, w, w_x, w_y et w_z en fonction des nouvelles variables.

$$u = -\frac{1-2r^2(s^2+t^2)}{r^2}U + \frac{\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}}{r}iV + s, \tag{4.49a}$$

$$\begin{aligned} u_x = {} & \frac{2s(3-4r^2(s^2+t^2))}{r^2}U - \frac{2s\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}}{r}iV \\ & + \frac{(2r^2s^2-1)(1-2r^2(s^2+t^2))}{r^4}U_s + \frac{2st(1-2r^2(s^2+t^2))}{r^2}U_t \\ & + \frac{(1-2r^2s^2)\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}}{r^3}iV_s - \frac{2st\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}}{r}iV_t \\ & + \frac{1-2r^2s^2}{r^2}, \end{aligned} \tag{4.49b}$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
w_z = {} & \frac{2(s^2+t^2)(4r^2(s^2+t^2)-3)}{r^2 s} U + \frac{2(s^2+t^2)\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}}{rs} iV \\
& - \frac{4(s^2+t^2)(1-r^2(s^2+t^2))}{r^2} U_s - \frac{4t(s^2+t^2)(1-r^2(s^2+t^2))}{r^2 s} U_t \\
& - \frac{(1-2r^2(s^2+t^2))\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}}{r^3} iV_s \\
& - \frac{t(1-2r^2(s^2+t^2))\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}}{r^3 s} iV_t \\
& - \frac{1-2r^2(s^2+t^2)}{r^2}.
\end{aligned} \tag{4.49l}
$$

Finalement, en effectuant la substitution dans le système initial, nous obtenons

$$
E_1 \equiv -\frac{1}{4s} V^2 + \frac{s^2+t^2}{s} U^2 + U + sU_s + tU_t = r^4 sq, \tag{4.50a}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2 \equiv {} & \left[4rt\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] U - \left[2r^2 t\right] iV \\
& - \left[4rst\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] U_s + \left[4rs^2\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] U_t \\
& + \left[2r^2 st\right] iV_s + \left[1-2r^2 s^2\right] iV_t = 0,
\end{aligned} \tag{4.50b}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3 \equiv {} & \left[4rt^2\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] U + \left[1-2r^2 t^2\right] iV \\
& - \left[4rst^2\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] U_s + \left[4rs^2 t\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] U_t \\
& + \left[s(2r^2 t^2-1)\right] iV_s - \left[2r^2 s^2 t\right] iV_t = 0,
\end{aligned} \tag{4.50c}
$$

$$
\begin{aligned}
E_4 \equiv {} & \left[t(1-2r^2(s^2+t^2))\right] U - \left[rt\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] iV \\
& - \left[st(1-2r^2(s^2+t^2))\right] U_s + \left[s^2(1-2r^2(s^2+t^2))\right] U_t \\
& + \left[rst\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] iV_s - \left[rs^2\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] iV_t = 0.
\end{aligned} \tag{4.50d}
$$

Des équations (4.50b) et (4.50c), nous avons

$$\begin{aligned} E_2' &\equiv tE_2 - E_3 \\ &\equiv -V + sV_s + tV_t = 0, \end{aligned} \tag{4.51a}$$

et

$$\begin{aligned} E_3' \equiv\ & tE_2 + E_3 \\ \equiv\ & \left[8rt^2\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] U + \left[1 - 4r^2t^2\right] iV \\ & - \left[8rst^2\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] U_s + \left[8rs^2t\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] U_t \\ & + \left[4r^2st^2 - s\right] iV_s + \left[t - 4r^2s^2t\right] iV_t = 0. \end{aligned} \tag{4.51b}$$

Puis, de (4.50d) et de (4.51b), nous avons

$$\begin{aligned} E_3'' \equiv\ & \sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}E_3' - 4rtE_4 \\ \equiv\ & \left[4rt^2\right] U + \left[\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] iV \\ & - \left[4rst^2\right] U_s + \left[4rs^2t\right] U_t \\ & - \left[s\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] iV_s + \left[t\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] iV_t = 0 \end{aligned} \tag{4.52a}$$

et

$$\begin{aligned} E_4' \equiv\ & \sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}E_3' + 4rtE_4 \\ \equiv\ & \left[4rt^2(3 - 4r^2(s^2+t^2))\right] U + \left[(1 - 8r^2t^2)\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] iV \\ & - \left[4rst^2(3 - 4r^2(s^2+t^2))\right] U_s + \left[4rs^2t(3 - 4r^2(s^2+t^2))\right] U_t \\ & + \left[(8r^2st^2 - s)\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] iV_s \\ & + \left[(t - 8r^2s^2t)\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] iV_t = 0. \end{aligned} \tag{4.52b}$$

Maintenant, en isolant V dans (4.51a) et en remplaçant dans (4.52a) et dans (4.52b) nous obtenons

$$E_3''' \equiv \left[4rt^2\right] U - \left[4rst^2\right] U_s + \left[4rs^2t\right] U_t + \left[2t\sqrt{1 - r^2(s^2+t^2)}\right] iV_t = 0, \tag{4.53a}$$

et

$$
\begin{aligned}
E_4'' \equiv\ & \left[4rt^2(3-4r^2(s^2+t^2))\right] U \\
& - \left[4rst^2(3-4r^2(s^2+t^2))\right] U_s + \left[4rs^2t(3-4r^2(s^2+t^2))\right] U_t \\
& + \left[2t(1-4r^2(s^2+t^2))\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] iV_t = 0.
\end{aligned}
\tag{4.53b}
$$

Puis, en isolant $4rt^2U$ dans (4.53a) et en remplaçant dans (4.53b), celle-ci devient

$$
E_4''' \equiv \left[-4t\sqrt{1-r^2(s^2+t^2)}\right] iV_t = 0. \tag{4.54}
$$

Par conséquent, $V_t = 0$. Donc, de (4.51a) , nous avons $V = c_1 si$ où c_1 est une constante réelle arbitraire.

Ainsi, le système à résoudre devient

$$
\begin{aligned}
E_1' &\equiv \frac{s^2+t^2}{s^2}U^2 + \frac{1}{s}U + \frac{t}{s}U_t + U_s = r^4 q - \frac{c_1^2}{4}, \\
E_2'' &\equiv \frac{t}{s}U + sU_t - tU_s = 0.
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

Maintenant si nous supposons un potentiel $q = \frac{C_1^2}{4r^4}$, alors la solution de (4.55) est donnée par

$$
U = \frac{2s}{(s^2+t^2)\ln\left(c_2(s^2+t^2)\right)} \tag{4.56}
$$

où c_2 est une constante réelle arbitraire. Ainsi une solution de notre système réduit est

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{2s}{(s^2+t^2)\ln\left(c_2(s^2+t^2)\right)}, \\
V &= c_1 si.
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

En faisant les opérations inverses, c.-à-d.

$$\begin{aligned}
u &= -\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\,(x^2+y^2)}{r^4}\right) U + \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{(x^2+y^2)}{r^4}}\, iV + \frac{x}{r^2},\\
v &= -\frac{y}{x}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\,(x^2+y^2)}{r^4}\right) U + \frac{y}{x}\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{(x^2+y^2)}{r^4}}\, iV + \frac{y}{r^2},\\
w &= \frac{2\,(x^2+y^2)}{xr^2}\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{(x^2+y^2)}{r^4}}\, U + \left(\frac{1}{2x} - \frac{(x^2+y^2)}{xr^2}\right) iV + \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{(x^2+y^2)}{r^4}},
\end{aligned} \tag{4.58}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{c_1xz}{r^4} + \frac{2x(x^2+y^2-z^2)}{r^2(x^2+y^2)\ln\left(c_2\left(\frac{x^2+y^2}{r^4}\right)\right)} + \frac{x}{r^2},\\
v &= -\frac{c_1yz}{r^4} + \frac{2y(x^2+y^2-z^2)}{r^2(x^2+y^2)\ln\left(c_2\left(\frac{x^2+y^2}{r^4}\right)\right)} + \frac{y}{r^2},\\
w &= \frac{c_1(x^2+y^2-z^2)}{2r^4} + \frac{4z}{r^2\ln\left(c_2\left(\frac{x^2+y^2}{r^4}\right)\right)} + \frac{z}{r^2}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Donc, une solution de l'équation de départ (3.69) avec $q = \frac{c_1^2}{4r^4}$ est

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} = &\left(-\frac{c_1xz}{r^4} + \frac{2x(x^2+y^2-z^2)}{r^2(x^2+y^2)\ln\left(c_2\left(\frac{x^2+y^2}{r^4}\right)\right)} + \frac{x}{r^2}\right) e_1\\
&+ \left(-\frac{c_1yz}{r^4} + \frac{2y(x^2+y^2-z^2)}{r^2(x^2+y^2)\ln\left(c_2\left(\frac{x^2+y^2}{r^4}\right)\right)} + \frac{y}{r^2}\right) e_2\\
&+ \left(\frac{c_1(x^2+y^2-z^2)}{2r^4} + \frac{4z}{r^2\ln\left(c_2\left(\frac{x^2+y^2}{r^4}\right)\right)} + \frac{z}{r^2}\right) e_3.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Solution à l'équation de Schrödinger

Encore une fois, d'après le théorème 2.66 du chapitre 2, nous pouvons obtenir une solution à l'équation de Schrödinger (2.12) à partir d'une solution de l'équation (3.69).

Ainsi, une solution de l'équation $\left(-\Delta + \left(\frac{c_1}{2(x^2+y^2+z^2)}\right)^2\right)\psi(x,y,z) = 0$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y,z) =\ & \exp\left(-\mathcal{A}[\boldsymbol{Q}]\right) \\
=\ & \exp\left[-\left(\int_1^x u(\xi,0,0)d\xi + \int_0^y v(x,\eta,0)d\eta + \int_0^z w(x,y,\zeta)d\zeta - \ln C\right)\right] \\
=\ & \exp\left[-\int_1^x \left(\frac{2}{\xi \ln\left(c_2\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\right)} + \frac{1}{\xi}\right) d\xi\right] \\
& \cdot \exp\left[-\int_0^y \left(\frac{2\eta}{(x^2+\eta^2)\ln\left(c_2\left(\frac{1}{(x^2+\eta^2)}\right)\right)} + \frac{\eta}{x^2+\eta^2}\right) d\eta\right] \\
& \cdot \exp\left[-\int_0^z \left(\frac{c_1(x^2+y^2-\zeta^2)}{2(x^2+y^2+\zeta^2)^2} + \frac{4\zeta}{(x^2+y^2+\zeta^2)\ln\left(c_2\left(\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+\zeta^2)^2}\right)\right)}\right.\right. \\
& \qquad \left.\left. + \frac{\zeta}{x^2+y^2+\zeta^2}\right) d\zeta\right] \cdot \exp\left[\ln C\right] \\
=\ & \exp\left[\ln\left(\ln\left(\frac{c_2}{x^2}\right)\right) - \ln(x) - \ln\left(\ln(c_2)\right)\right] \\
& \cdot \exp\left[\ln\left(\ln\left(\frac{c_2}{x^2+y^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{c_2}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2\right)\right] \\
& \cdot \exp\left[\frac{-c_1 z}{2(x^2+y^2+z^2)} + \ln\left(\ln\left(c_2\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\right)\right. \\
& \qquad \left. - \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{2}\right] \\
& \cdot \exp\left[-\ln\left(\ln\left(\frac{c_2}{x^2+y^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right] \cdot \exp\left[\ln C\right] \\
=\ & \exp\left[-\ln\left(\ln(c_2)\right) + \ln\left(\ln\left(c_2\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)\right)\right] \\
& \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right) + \ln C + \frac{-c_1 z}{2(x^2+y^2+z^2)}\right] \\
=\ & \frac{C \ln\left(c_2 \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)}{\ln(c_2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\exp\left(\frac{c_1 z}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}\right)}
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

Ainsi,

$$\psi(x,y,z) = \frac{C \ln\left(c_2 \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)}{\ln(c_2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\exp\left(\dfrac{c_1 z}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}\right)} \tag{4.62}$$

est une solution de l'équation de Schrödinger (2.12) lorsque $q = \left(\frac{c_1}{2(x^2+y^2+z^2)}\right)^2$, $c_2 > 0$.

Conclusion

Par ce mémoire, nous sommes maintenant en mesure de mieux comprendre l'équation de Riccati généralisée dans les biquaternions et par le fait même l'article «On a three-dimensional Riccati differential equation and its symmetries» publié dans *Journal of Mathematical Analysis and Applications* [26]. En effet, au départ, l'équation de Riccati standard a été présentée. Puis, les quaternions et les biquaternions ont été abordés, ainsi qu'une généralisation de l'équation de Riccati. Enfin, la théorie des groupes de symétries a été utilisée dans trois exemples pertinents en physique. Notons aussi que l'ensemble de ces éléments nous a permis de trouver une solution à l'équation de Schrödinger stationnaire tridimensionnelle ayant un potentiel intéressant et réaliste en physique.

Finalement, même si plusieurs sujets ont été traités dans ce mémoire, il y a encore des éléments intéressants qui n'ont pas été abordés. Ainsi, il serait pertinent de trouver les symétries de l'équation de Riccati généralisée dans les biquaternions, plutôt que seulement dans les quaternions. De plus, dans le dernier chapitre, lors de la réduction par symétries des différents exemples, nous avons effectué les réductions en choisissant certaines symétries. Idéalement, ces réductions pourraient être faites avec toutes les symétries en considérant les classes d'équivalence.

Bibliographie

[1] Simon L. ALTMANN : *Rotations, quaternions, and double groups.* Dover, 2005.

[2] Swanhild BERNSTEIN : Factorization of solutions of the Schrödinger equation. *Dans Proceedings of the symposium Analytical and numerical methods in quaternionic and clifford analysis.* Seiffen, 1996.

[3] Swanhild BERNSTEIN et Klaus GÜRLEBECK : On a higher dimensional Miura transform. *Complex Variables, Theory and Application : An International Journal*, 38(4), 1999.

[4] Alex BILODEAU et Sébastien TREMBLAY : On two-dimensional supersymmetric quantum mechanics, pseudoanalytic functions and transmutation operators. *Journal of Physics A*, 46(42), 2013. 425302.

[5] Amy BUCHMANN : A brief history of quaternions and the theory of holomorphic functions of quaternionic variables. *arXiv*, 2011. arXiv :1111.6088.

[6] Jean Gaston DARBOUX : Sur une proposition relative aux équations linéaires. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 94:1456–1459, 1882.

[7] Harold T. DAVIS : *Introduction to nonlinear differential and integral equations.* Dover, 1962.

[8] Klaus GÜRLEBECK, Klaus HABETHA et Wolfgang SPRÖSSIG : *Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space.* Birkhäuser, 2008.

[9] Klaus GÜRLEBECK et Wolfgang SPRÖSSIG : *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems.* Birkhäuser, 1989.

[10] Klaus GÜRLEBECK et Wolfgang SPRÖSSIG : *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers.* Wiley, 1998.

[11] William Rowan HAMILTON : *Lectures on quaternions.* 1853.

[12] Malte HENKEL et Jérémie UNTERBERGER : Supersymmetric extensions of Schrödinger-invariance. *Nuclear Physics B*, 746:155–201, 2006.

[13] Einar HILLE : *Ordinary differential equations in the complex domain.* Dover, 1997.

[14] Peter E. HYDON : *Symmetry methods for differential equations : a beginner's guide.* Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, 2000.

[15] Edward L. INCE : *Ordinary differential equations.* Dover, 1956.

[16] Kira V. KHMELNYTSKAYA et Vladislav V. KRAVCHENKO : On a complex differential Riccati equation. *Journal of Physics A*, 41(8), 2008. 85205.

[17] Viktor KRAVCHENKO, Vladislav V. KRAVCHENKO et Benjamin WILLIAMS : A quaternionic generalisation of the Riccati differential equation. *Dans Clifford Analysis and Its Applications*, pages 143–154. Brackx, F. et al., 2001.

[18] Vladislav V. KRAVCHENKO : *Applied Quaternionic Analysis*, volume 28 de *Research and Exposition in Mathematics.* Heldermann Verlag, 2003.

[19] Vladislav V. KRAVCHENKO : On the reduction of the multidimensional stationary Schrödinger equation to a first order equation and its relation to the pseudoanalytic function theory. *Journal of Physics A*, 38(4):851–868, 2005.

[20] Vladislav V. KRAVCHENKO et Sébastien TREMBLAY : Spatial pseudoanalytic functions arising from the factorization of linear second order elliptic operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(16), 2011.

[21] Vladimir B. MATVEEV et Mikhail A. SALLE : *Darboux transformations and solitons.* Springer, 1991.

[22] Dennis MORRIS : *Quaternions.* Abane and Right, 2015.

[23] Dennis MORRIS : *Lie groups and Lie algebras.* Abane and Right, 2016.

[24] Peter J. OLVER : *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107 de *Graduate texts in mathematics.* Springer, 2 édition, 1993.

[25] Peter J. OLVER : *Equivalence, Invariants and Symmetry.* Cambridge University Press, 1995.

[26] Charles PAPILLON et Sébastien TREMBLAY : On a three-dimensional Riccati differential equation ant its symmetries. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 458(1), 2018.

[27] Roger PENROSE : *À la découverte des lois de l'univers.* Odile Jacob, 2004.

[28] William T. REID : *Riccati differential equations.* Academic press, 1972.

[29] Stephen J. SANGWINE, Todd A. ELL et Nicolas LE BIHAN : Fundamental representations and algebraic properties of biquaternions or complexified quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 21(3):607–636, 2011.

[30] Dieter SCHUCH : Nonlinear Riccati equations as a unifying link between linear quantum mechanics and other fields of physics. *Journal of Physics : Conference Series*, 504, 2014. 12005.

[31] Isabelle STE-MARIE : Symétries des systèmes dynamiques discrets de dimension deux. Mémoire de maîtrise, UQTR, Mai 2009.

[32] Anthony SUDBERY : Quaternionic analysis. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 85(2):199–225, 1979.

[33] Marie-France VIGNÉRAS : *Arithmétique des algebres de quaternions*, volume 800 de *Lecture notes in mathematics.* Springer, 1980.

[34] Thi Ngoc Ha VU : Helmholtz operator in quaternionic analysis. Thèse de doctorat, Freie Universität Berlin, Février 2005.

[35] Sascha WALD et Malte HENKEL : Lindblad dynamics of a quantum spherical spin. *Journal of Physics A*, 49, 2016. 125001.

[36] Joe P. WARD : *Quaternions and Cayley Numbers*, volume 403 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer, 1997.

[37] George Neville WATSON : *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 2e édition, 1966.

Annexe A

A.1 Preuve du théorème 2.9

Théorème 2.9 p. 24 :

Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :

1. $\mathrm{Sc}\,(x) = \frac{x+\overline{x}}{2}$,
2. $\boldsymbol{x} = \frac{x-\overline{x}}{2}$,
3. $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$,
4. $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}, x \neq 0$,
5. $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$,
6. $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$,
7. $\overline{\overline{x}} = x$,
8. $|xy| = |x||y|$,
9. $|\overline{x}| = |-x| = |x|$,
10. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, xy \neq 0$.

Preuve

1. $\mathrm{Sc}\,(x) = \frac{x+\overline{x}}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{x+\overline{x}}{2} &= \frac{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3}{2}\\ &= x_0\\ &= \mathrm{Sc}\,(x).\end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{x} = \frac{x-\overline{x}}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{x-\overline{x}}{2} &= \frac{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 - x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}{2}\\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3\\ &= \boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

3. $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$: Il suffit de développer les expressions et de réarranger les

termes.

4. $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}, x \neq 0$:

$$\frac{\overline{x}}{|x|^2} = \frac{\overline{x}}{x\overline{x}} = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

5. $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$:

$$\begin{aligned}
\overline{x+y} &= \overline{(x_0+y_0)+(x_1+y_1)e_1+(x_2+y_2)e_2+(x_3+y_3)e_3} \\
&= (x_0+y_0)-(x_1+y_1)e_1-(x_2+y_2)e_2-(x_3+y_3)e_3 \\
&= (x_0-x_1e_1-x_2e_2-x_3e_3)+(y_0-y_1e_1-y_2e_2-y_3e_3) \\
&= \overline{x}+\overline{y}.
\end{aligned}$$

6. $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$:

$$\begin{aligned}
\overline{xy} &= \overline{(x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)(y_0+y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3)} \\
&= (x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)-(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)e_1 \\
&\quad -(x_0y_2-x_1y_3+x_2y_0+x_3y_1)e_2-(x_0y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_0)e_3 \\
&= (y_0-y_1e_1-y_2e_2-y_3e_3)(x_0-x_1e_1-x_2e_2-x_3e_3) \\
&= \overline{y}\,\overline{x}.
\end{aligned}$$

7. $\overline{\overline{x}} = x$:

$$\overline{\overline{x}} = \overline{x_0-x_1e_1-x_2e_2-x_3e_3} = x_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 = x.$$

8. $|xy| = |x||y|$:

$$\begin{aligned}
&|xy|^2 = xy\overline{xy} = xy\overline{y}\,\overline{x} = x|y|^2\overline{x} = x\overline{x}|y|^2 = |x|^2|y|^2 \\
\Rightarrow &|xy| = |x||y|.
\end{aligned}$$

9. $|\overline{x}| = |-x| = |x|$:

$$\begin{aligned} |\overline{x}| &= |x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3| \\ &= \sqrt{(x_0)^2 + (-x_1)^2 + (-x_2)^2 + (-x_3)^2} \\ &= \sqrt{(-x_0)^2 + (-x_1)^2 + (-x_2)^2 + (-x_3)^2} \\ &= |-x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3| \\ &= |-x|. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |-x| &= \sqrt{(-x_0)^2 + (-x_1)^2 + (-x_2)^2 + (-x_3)^2} \\ &= \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ &= |x|. \end{aligned}$$

10. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, xy \neq 0$:

$$(xy)^{-1} = \frac{\overline{xy}}{|xy|^2} = \frac{\overline{y}\,\overline{x}}{(|x||y|)^2} = \frac{\overline{y}\,\overline{x}}{|y|^2|x|^2} = \frac{\overline{y}}{|y|^2}\frac{\overline{x}}{|x|^2} = y^{-1}x^{-1}.$$

■

A.2 Preuve du théorème 2.10

Théorème 2.10 p. 24 :

Soit $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, *alors*

1. $\overline{x} = -\dfrac{1}{2}\left(x + e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_3xe_3\right)$,
2. $x_0 = \dfrac{1}{4}\left(x - e_1xe_1 - e_2xe_2 - e_3xe_3\right)$,
3. $x_1 = \dfrac{1}{4e_1}\left(x - e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_3xe_3\right)$,
4. $x_2 = \dfrac{1}{4e_2}\left(x + e_1xe_1 - e_2xe_2 + e_3xe_3\right)$,
5. $x_3 = \dfrac{1}{4e_3}\left(x + e_1xe_1 + e_2xe_2 - e_3xe_3\right)$.

Preuve

1. $\overline{x} = -\dfrac{1}{2}\left(x + e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_3xe_3\right)$:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\left(x + e_1xe_1 + e_2xe_2 + e_3xe_3\right) \\
= & -\frac{1}{2}(x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 - x_0 - x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \\
& -x_0 + x_1e_1 - x_2e_2 + x_3e_3 - x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 - x_3e_3) \\
= & \; x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 \\
= & \; \overline{x}.
\end{aligned}
$$

2. $x_0 = \dfrac{1}{4}(x - e_1 x e_1 - e_2 x e_2 - e_3 x e_3)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(x - e_1 x e_1 - e_2 x e_2 - e_3 x e_3) \\
&= \frac{1}{4}(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_0 + x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 \\
&\quad + x_0 - x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3 + x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 + x_3 e_3) \\
&= x_0.
\end{aligned}$$

3. $x_1 = \dfrac{1}{4e_1}(x - e_1 x e_1 + e_2 x e_2 + e_3 x e_3)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4e_1}(x - e_1 x e_1 + e_2 x e_2 + e_3 x e_3) \\
&= \frac{1}{4e_1}(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_0 + x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 \\
&\quad - x_0 + x_1 e_1 - x_2 e_2 + x_3 e_3 - x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3) \\
&= x_1.
\end{aligned}$$

4. $x_2 = \dfrac{1}{4e_2}(x + e_1 x e_1 - e_2 x e_2 + e_3 x e_3)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4e_2}(x + e_1 x e_1 - e_2 x e_2 + e_3 x e_3) \\
&= \frac{1}{4e_2}(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 - x_0 - x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\
&\quad + x_0 - x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3 - x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3) \\
&= x_2.
\end{aligned}$$

5. $x_3 = \dfrac{1}{4e_3}\left(x + e_1 x e_1 + e_2 x e_2 - e_3 x e_3\right)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4e_3}\left(x + e_1 x e_1 + e_2 x e_2 - e_3 x e_3\right)\\
=\ &\frac{1}{4e_3}(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 - x_0 - x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3\\
&-x_0 + x_1 e_1 - x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 + x_3 e_3)\\
=\ &x_3.
\end{aligned}
$$

■

A.3 Preuve du théorème 2.11

Théorème 2.11 p. 25 :

Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :

1. $|\mathrm{Sc}\,(x)| \leq |x|$ *et* $|\boldsymbol{x}| \leq |x|$,

2. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité du triangle)*,

3. $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Preuve

1. $|\mathrm{Sc}\,(x)| \leq |x|$ et $|\boldsymbol{x}| \leq |x|$:

$$|\mathrm{Sc}\,(x)| = \sqrt{x_0^2} \leq \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |x|.$$

   De même,

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |x|.$$

2. $|x+y| \leq |x| + |y|$:

$$\begin{aligned}
|x+y|^2 &= (x+y)(\overline{x+y}) \\
&= (x+y)(\overline{x} + \overline{y}) \\
&= x\overline{x} + x\overline{y} + y\overline{x} + y\overline{y} \\
&= |x|^2 + |y|^2 + y\overline{x} + \overline{\overline{x\overline{y}}} \\
&= |x|^2 + |y|^2 + 2\frac{y\overline{x} + \overline{y\overline{x}}}{2} \\
&= |x|^2 + |y|^2 + 2\mathrm{Sc}\,(y\overline{x}) \\
&\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|y\overline{x}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |x|^2 + |y|^2 + 2|y||\overline{x}| \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ &= (|x| + |y|)^2 \\ \Rightarrow |x+y| &\leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$:

$$\begin{aligned} |x| &= |y + x - y| \\ &\leq |y| + |x - y| \\ \Rightarrow |x| - |y| &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} |y| - |x| &\leq |y - x| \\ &= |-(x - y)| = |x - y|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

$\blacksquare$

A.4 Preuve du théorème 2.16

Théorème 2.16 p. 27 :

Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = -\mathrm{Sc}\,(\boldsymbol{xy}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{yx})$,
2. $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \mathrm{Vec}\,(\boldsymbol{xy}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx})$,
3. $\boldsymbol{x}^2 = -|\boldsymbol{x}|^2$.

Preuve

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = -\mathrm{Sc}\,(\boldsymbol{xy}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{yx})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = -\mathrm{Sc}\,(\boldsymbol{xy}) \\ &= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} + \overline{\boldsymbol{xy}}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} + \overline{\boldsymbol{y}}\,\overline{\boldsymbol{x}}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{yx}). \end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \mathrm{Vec}\,(\boldsymbol{xy}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} &= (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3 = \mathrm{Vec}\,(\boldsymbol{xy}) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} - \overline{\boldsymbol{xy}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} - \overline{\boldsymbol{y}}\,\overline{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx}). \end{aligned}$$

3. $\boldsymbol{x}^2 = -|\boldsymbol{x}|^2$:

$$\boldsymbol{x}^2 = -\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -|\boldsymbol{x}|^2.$$

■

A.5 Preuve du théorème 2.17

Théorème 2.17 p. 27 :

Soit $x, y \in \mathbb{H}$, alors :

1. $x = \boldsymbol{x} \neq 0$ *si et seulement si* x^2 *est réel et négatif,*

2. $x = x_0 \neq 0$ *si et seulement si* x^2 *est réel et positif,*

3. $x^2 = y^2$ *n'implique pas nécessairement* $x = \pm y$,

4. x *est un nombre réel si et seulement si* $\forall y \in \mathbb{H}$, $yx = xy$.

Preuve

1. $x = \boldsymbol{x} \neq 0$ si et seulement si x^2 est réel et négatif :

   $\Rightarrow$: Soit $x = \boldsymbol{x} \neq 0$. Par 2.16 (3), $x^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) < 0$ car x_1^2, x_2^2 et x_3^2 sont positifs et un des trois n'est pas nul puisque $\boldsymbol{x} \neq 0$.

   $\Leftarrow$: Soit $x^2 < 0$. Puisque $x^2 = x_0^2 + 2x_0x_1e_1 + 2x_0x_2e_2 + 2x_0x_3e_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, alors $x_0 = 0$. Sinon x^2 n'est pas réel ou l'inégalité n'est pas respectée. De plus, $\boldsymbol{x} \neq 0$ pour satisfaire l'inégalité. Donc, $x = \boldsymbol{x} \neq 0$.

2. $x = x_0 \neq 0$ si et seulement si x^2 est réel et positif :

   $\Rightarrow$: Soit $x = x_0 \neq 0$, alors $x^2 = x_0^2 \in \mathbb{R}^+$.

   $\Leftarrow$: Soit $x^2 \in \mathbb{R}^+$ et $x^2 > 0$. Puisque $x^2 = x_0^2 + 2x_0x_1e_1 + 2x_0x_2e_2 + 2x_0x_3e_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Sinon x^2 n'est pas réel ou l'inégalité n'est pas respectée. De plus, $x_0 \neq 0$ pour satisfaire l'inégalité. Donc, $x = x_0 \neq 0$.

3. $x^2 = y^2$ n'implique pas nécessairement $x = \pm y$:

   Soit $x^2 = y^2 < 0$, alors de 2.17 (1), $x_0 = y_0 = 0$ et $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{y}^2$. Ainsi, $-\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{y}$. Donc, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Par conséquent, il suffit de prendre $x = e_1$ et $y = e_2$ pour que $x \neq \pm y$, mais que $x^2 = y^2 = -1$.

4. x est un nombre réel si et seulement si $\forall y \in \mathbb{H}$, $yx = xy$:

$\Rightarrow$: Soit $x = x_0$, alors

$$\begin{aligned} yx &= (y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3)x_0 \\ &= y_0x_0 + y_1x_0e_1 + y_2x_0e_2 + y_3x_0e_3 \\ &= x_0y_0 + x_0y_1e_1 + x_0y_2e_2 + x_0y_3e_3 \\ &= x(y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) \\ &= xy. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Soit $yx = xy$, alors

$$\begin{aligned} &(y_0x_0 - y_1x_1 - y_2x_2 - y_3x_3) + (y_0x_1 + y_1x_0 + y_2x_3 - y_3x_2)e_1 \\ &\quad + (y_0x_2 + y_2x_0 - y_1x_3 + y_3x_1)e_2 + (y_0x_3 + y_1x_2 - y_2x_1 + y_3x_0)e_3 \\ = &(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)e_1 \\ &\quad + (x_0y_2 + x_2y_0 - x_1y_3 + x_3y_1)e_2 + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)e_3. \end{aligned}$$

De cette égalité, nous avons les 4 égalités suivantes :

$$\begin{aligned} y_0x_0 - y_1x_1 - y_2x_2 - y_3x_3 &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3, \\ y_0x_1 + y_1x_0 + y_2x_3 - y_3x_2 &= x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2, \\ y_0x_2 + y_2x_0 - y_1x_3 + y_3x_1 &= x_0y_2 + x_2y_0 - x_1y_3 + x_3y_1, \\ y_0x_3 + y_1x_2 - y_2x_1 + y_3x_0 &= x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0. \end{aligned}$$

En simplifiant ces égalités, nous trouvons les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} x_2y_3 &= x_3y_2, \\ x_1y_3 &= x_3y_1, \\ x_1y_2 &= x_2y_1. \end{aligned}$$

Puisque ces égalités doivent être vrai pour tout y, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ainsi, $x = x_0$ et x est un nombre réel.

■

A.6 Preuve du corollaire 2.20

Corollaire 2.20 p.28 :

Soit $x = x_0 + \boldsymbol{x} \in \mathbb{H}$ *où* $x \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*, alors*

$$(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin n\varphi.$$

Preuve

Pour $n = 0$, l'équation donne 1 de chaque côté.

Pour $n > 0$, nous devons utiliser l'induction. Soit $(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin n\varphi$, alors

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi)^{n+1} &= (\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi)^n(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi) \\ &= (\cos n\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin n\varphi)(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin\varphi) \\ &= \cos n\varphi\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cos n\varphi\sin\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\sin n\varphi\cos\varphi \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}^2(\boldsymbol{x})\sin n\varphi\sin\varphi.\end{aligned}$$

Toutefois, des identités trigonométriques nous avons

$$\begin{aligned}\cos n\varphi\cos\varphi &= \cos(n+1)\varphi + \sin\varphi\sin n\varphi, \\ \cos n\varphi\sin\varphi &= \sin(n+1)\varphi - \cos\varphi\sin n\varphi.\end{aligned}$$

De plus, nous avons aussi

$$\boldsymbol{\omega}^2(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^2}{|\boldsymbol{x}|^2} = -1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \cos n\varphi \cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \cos n\varphi \sin\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \sin n\varphi \cos\varphi + \boldsymbol{\omega}^2(\boldsymbol{x}) \sin n\varphi \sin\varphi \\
= \; & \cos(n+1)\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \sin(n+1)\varphi.
\end{aligned}$$

Ainsi, la relation est vraie pour $n+1$. Par induction, l'équation est donc vraie pour $n > 0$.

Pour $n < 0$, nous devons faire quelques manipulations algébriques. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin\varphi)^{-1} &= \frac{\overline{(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin\varphi)}}{|(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin\varphi)|^2} \\
&= \frac{(\cos\varphi - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin\varphi)}{1} \\
&= (\cos(-\varphi) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin(-\varphi)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $n < 0$,

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \sin\varphi)^n &= (\cos\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \sin\varphi)^{(-1)(-n)} \\
&= (\cos(-\varphi) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin(-\varphi))^{-n} \\
&= \cos n\varphi + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \sin n\varphi.
\end{aligned}$$

■

A.7 Preuve du théorème 2.24

Théorème 2.24 p. 30 :

Un automorphisme ou un antiautomorphisme m de l'algèbre $\mathbb{H}$ peut toujours être représenté par :

$$m(x) = x_0 + h(\mathbf{x}), \quad x \in \mathbb{H}$$

où h est un automorphisme orthogonal dans $\mathbb{R}^3$.

Preuve

Soit $m(1) = y_0 + \mathbf{y}$ avec $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Puisque $m(1) = m(1^2) = m^2(1)$, nous avons

$$y_0^2 - |\mathbf{y}|^2 + 2y_0\mathbf{y} = y_0 + \mathbf{y}.$$

Pour $\boldsymbol{y} \neq 0$, $2y_0 = 1$ et $y_0^2 - |\boldsymbol{y}|^2 = y_0$. Toutefois, cela ne fonctionne pas, car de ces deux expressions, nous trouvons $-|\boldsymbol{y}|^2 = \frac{1}{4}$, qui est impossible. Ainsi, $\boldsymbol{y} = 0$, donc $y_0 = 1$ et $m(x_0) = x_0$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, pour un $x = x_0 + \boldsymbol{x}$ arbitraire, il suit que

$$m(x) = x_0 + m(\boldsymbol{x}).$$

Si $m(\boldsymbol{x}) = y_0 + \boldsymbol{y}$, alors

$$m(\boldsymbol{x}^2) = -m(|\boldsymbol{x}|^2) = -|\boldsymbol{x}|^2 = y_0^2 - |\boldsymbol{y}|^2 + 2y_0\boldsymbol{y}.$$

Nous devons donc avoir $y_0\boldsymbol{y} = 0$, et puisque $\mathbf{y} = 0$ est exclu, car $-|\boldsymbol{x}|^2 = y_0^2$ est impossible, nous trouvons $y_0 = 0$ et $m(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, $m(\boldsymbol{x})$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et comme $m(|\boldsymbol{x}|^2) = |\boldsymbol{x}|^2$, la norme est conservée et $m(\boldsymbol{x})$ est orthogonal dans $\mathbb{R}^3$. ■

A.8 Preuve du théorème 2.26

Théorème 2.26 p. 31 :

Pour $x, x' \in \mathbb{H}$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, l'application ρ_y possède les propriétés suivantes :

1. $\rho_y(\lambda x + \lambda' x') = \lambda \rho_y(x) + \lambda' \rho_y(x')$,
2. $\rho_y(xx') = \rho_y(x)\rho_y(x')$,
3. *ρ_y est un automorphisme isométrique sur $\mathbb{H}$,*
4. *le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^4$ est invariant sur l'application ρ_y, c.-à-d.* $\rho_y(x) \cdot \rho_y(x') = x \cdot x'$,
5. $\rho_y \rho_{y'} = \rho_{yy'}$,
6. *ρ_y est homomorphe par rapport au produit vectoriel, c.-à-d.* $\rho_y(\boldsymbol{x}) \times \rho_y(\boldsymbol{x'}) = \rho_y(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x'})$.

Preuve

1. $\rho_y(\lambda x + \lambda' x') = \lambda \rho_y(x) + \lambda' \rho_y(x')$:

$$
\begin{aligned}
\rho_y(\lambda x + \lambda' x') &= y(\lambda x + \lambda' x')y^{-1} && \text{par définition de l'application } \rho_y \\
&= y\lambda x y^{-1} + y\lambda' x' y^{-1} && \text{par distributivité} \\
&= \lambda y x y^{-1} + \lambda' y x' y^{-1} && \text{car } \lambda \text{ et } \lambda' \text{ sont des nombres réels} \\
&= \lambda \rho_y(x) + \lambda' \rho_y(x') && \text{par définition de l'application } \rho_y.
\end{aligned}
$$

2. $\rho_y(xx') = \rho_y(x)\rho_y(x')$:

$$\begin{aligned}
\rho_y(xx') &= yxx'y^{-1} && \text{par définition de l'application } \rho_y \\
&= yxy^{-1}yx'y^{-1} && \text{car } y^{-1}y = 1, \text{ l'élément neutre de la multiplication} \\
&= \rho_y(x)\rho_y(x') && \text{par définition de l'application } \rho_y.
\end{aligned}$$

3. ρ_y est un automorphisme isométrique sur $\mathbb{H}$:

   Comme $\rho_y^{-1}(x) = y^{-1}xy = \rho_{y^{-1}}$ alors ρ_y est un automorphisme.

   De plus, $|\rho_y(x)| = |yxy^{-1}| = |x|$, donc ρ_y est un automorphisme isométrique.

4. $\rho_y(x) \cdot \rho_y(x') = x \cdot x'$:

$$\begin{aligned}
&\rho_y(x) \cdot \rho_y(x') \\
&= \frac{1}{2}(\rho_y(x')\overline{\rho_y(x)} + \rho_y(x)\overline{\rho_y(x')}) && \text{par définition du produit scalaire} \\
&= \frac{1}{2}(yx'y^{-1}\overline{yxy^{-1}} + yxy^{-1}\overline{yx'y^{-1}}) && \text{par définition de l'application } \rho_y \\
&= \frac{1}{2}(yx'y^{-1}\overline{y^{-1}}\,\overline{x}\,\overline{y} + yxy^{-1}\overline{y^{-1}}\,\overline{x'}\,\overline{y}) && \text{par 2.9 (6)} \\
&= \frac{1}{2}y(x'|y^{-1}|^2\overline{x} + x|y^{-1}|^2\overline{x'})\overline{y} && \text{par distributivité et par 2.9 (3)} \\
&= \frac{1}{2}y(x'\overline{x} + x\overline{x'})\frac{1}{|y|^2}\overline{y} && \text{par distributivité} \\
&= \frac{1}{2}y(x\overline{x'} + x'\overline{x})y^{-1} && \text{par 2.9 (4)} \\
&= y(x \cdot x')y^{-1} && \text{par définition du produit scalaire} \\
&= yy^{-1}(x \cdot x') && \text{car } (x \cdot x') \in \mathbb{R} \\
&= x \cdot x' && \text{car } yy^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

5. $\rho_y \rho_{y'} = \rho_{yy'}$:

$$\begin{aligned}
\rho_y \rho_{y'}(x) &= y(y'xy'^{-1})y^{-1} && \text{par définition de l'application } \rho_y \text{ et } \rho_{y'} \\
&= yy'xy'^{-1}y^{-1} && \text{par associativité} \\
&= (yy')x(yy')^{-1} && \text{par 2.9 (10)} \\
&= \rho_{yy'}(x) && \text{par définition de l'application } \rho_{yy'}.
\end{aligned}$$

6. ρ_y est homomorphe par rapport au produit vectoriel, c.-à-d. $\rho_y(\boldsymbol{x}) \times \rho_y(\boldsymbol{x}') = \rho_y(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}')$:

$$\begin{aligned}
&\rho_y(\boldsymbol{x}) \times \rho_y(\boldsymbol{x}') \\
&= \frac{1}{2}\left(\rho_y(\boldsymbol{x})\rho_y(\boldsymbol{x}') - \rho_y(\boldsymbol{x}')\rho_y(\boldsymbol{x})\right) && \text{par définition du produit vectoriel} \\
&= \frac{1}{2}\left(y\boldsymbol{x}y^{-1}y\boldsymbol{x}'y^{-1} - y\boldsymbol{x}'y^{-1}y\boldsymbol{x}y^{-1}\right) && \text{par définition de l'application } \rho_y \\
&= \frac{1}{2}y(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})y^{-1} && \text{par distributivité} \\
&= \rho_y(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}') && \text{par définition du produit vectoriel.}
\end{aligned}$$

■

A.9 Preuve du théorème 2.29

Théorème 2.29 p. 32 :

Soit $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Vec}(\mathbb{H})$, *en prenant* $y \in \mathbb{H}$ *sous forme polaire avec* $|y| = 1$, *nous obtenons*

$$\rho_y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})\sin 2\varphi + (1 - \cos 2\varphi)(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}.$$

Preuve

En utilisant le théorème 2.18, nous avons $y = y_0 + \boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{y}|$ où $y_0^2 + |\boldsymbol{y}|^2 = 1$ et $\boldsymbol{\omega}^2 = -1$. Nous remarquons d'abord que dans ce cas, $\rho_y(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}$, car

$$\rho_y(\boldsymbol{\omega}) = (y_0 + \boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{\omega}(y_0 - \boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{y}|) = (y_0^2 + |\boldsymbol{y}|^2)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\rho_y(\boldsymbol{x}) &= y_0\boldsymbol{x}y_0 - y_0\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\omega} + |\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x}y_0 - |\boldsymbol{y}|^2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega} \\
&= y_0^2\boldsymbol{x} + y_o|\boldsymbol{y}|(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}) - |\boldsymbol{y}|^2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega} \\
&= \boldsymbol{x}\cos^2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})\sin 2\varphi - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega}\sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

Finalement, puisque

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega},$$

en utilisant les identités trigonométriques, nous obtenons

$$\rho_y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})\sin 2\varphi + (1 - \cos 2\varphi)(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}.$$

$\blacksquare$

A.10 Preuve du théorème 2.30

Théorème 2.30 p. 32 :

Toute application ρ_y est une rotation d'angle 2φ par rapport à l'axe $\boldsymbol{\omega}$. À l'inverse, toutes les rotations dans $\mathbb{R}^3$ peuvent être représentées par une application ρ_y.

Preuve

Soit une application ρ_y et un vecteur $\boldsymbol{x}$. Nommons $\boldsymbol{x}' = \rho_y(\boldsymbol{x})$ le résultat de l'application ρ_y sur le vecteur $\boldsymbol{x}$. Posons $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$ les parties perpendiculaires à $\boldsymbol{\omega}$ de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}'$ respectivement. Ainsi,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{z}' + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}')\boldsymbol{\omega}.$$

Comme l'application ρ_y laisse le produit scalaire invariant et que $\rho_y(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}$, nous avons $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}'$. Finalement, en remplaçant dans la formule d'Euler-Rodrigues, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}' &= \boldsymbol{x}' - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}')\boldsymbol{\omega} \\
&= \boldsymbol{x}' - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} \\
&= \boldsymbol{x} \cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) \sin 2\varphi + (1 - \cos 2\varphi)(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} \\
&= \boldsymbol{x} \cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) \sin 2\varphi - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} \cos 2\varphi \\
&= (\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}) \cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) \sin 2\varphi - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega} \cos 2\varphi \\
&= \boldsymbol{z} \cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{z}) \sin 2\varphi.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation nous dit que $\boldsymbol{z}$ subit une rotation d'un angle de 2φ dans le plan orthogonal à $\boldsymbol{\omega}$ puisque dans ce plan, $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{z}$ forment un système orthogonal de coordonnées. La composante de $\boldsymbol{x}$ dans la direction de $\boldsymbol{\omega}$ demeure inchangée. Ainsi, cela décrit une rotation de $\mathbb{R}^3$ par rapport à l'axe $\boldsymbol{\omega}$ d'un angle de 2φ.

Nous devons encore montrer que toutes les rotations peuvent être représentées par un ρ_y. Toutefois, si nous avons une rotation, nous connaissons l'axe de rotation $\boldsymbol{\omega}$ et l'angle de rotation 2φ. À partir de ces informations, nous déterminons $y_0 = \cos\varphi$ et $|\boldsymbol{y}| = \sin\varphi$, donc $y = y_0 + \boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{y}|$. ∎

A.11 Preuve du théorème 2.33

Théorème 2.33 p. 35 :

Les rotations de $\mathbb{H}$ *sont exactement celles des applications*

$$x \mapsto axb$$

avec $|a| = |b| = 1$ *et* $a, b \in \mathbb{H}$.

Preuve

Posons $x' = axb$ et $y' = ayb$ où $a, b, x, y \in \mathbb{H}$ et où $|a| = |b| = 1$. Pour commencer, nous remarquons que l'application $x \mapsto axb$ est orthogonale, car

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= \frac{1}{2}(x'\overline{y'} + y'\overline{x'}) \\ &= \frac{1}{2}(axb\overline{ayb} + ayb\overline{axb}) \\ &= \frac{1}{2}a(xb\overline{ayb} + yb\overline{axb}) \\ &= \frac{1}{2}a(xb\bar{b}\overline{y} + yb\bar{b}\overline{x})\overline{a} \\ &= \frac{1}{2}a(x\overline{y} + y\overline{x})\overline{a} \\ &= \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}) \\ &= x \cdot y. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que ax est une rotation. Pour ce faire, nous devons montrer que le déterminant de la matrice A correspondante est égale à 1. Notons que la multiplication de deux quaternions est équivalente à la multiplication de deux matrices

4×4 ayant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

où la matrice représente le quaternion $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Ainsi, dans notre cas,

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 = |a|^4 = 1.$$

De façon similaire, nous obtenons le résultat pour xb.

De plus, nous savons que la composition de deux rotations donne une autre rotation. Ainsi, $x \mapsto axb$ définit bien une rotation.

À l'inverse, si une rotation R est donnée, alors posons $R(e_0) = s$. Il suit que $R_1 = s^{-1}R$ est une rotation où $R_1(e_0) = e_0$. De cette façon, les nombres réels sont invariants sous R_1, donc R_1 est une rotation dans $\mathbb{R}^3$, donc R_1 à la forme suivante : $R_1(x) = txt^{-1}$. Par conséquent, $R(x) = stxt^{-1}$.

En posant $a = st$ et $b = t^{-1}$, nous avons $|a| = |st| = |s||t| = 1$ et $|b| = |t^{-1}| = 1$, le résultat voulu. ■

A.12 Preuve du théorème 2.58

Théorème 2.58 p. 46 :

Soit φ *et* ψ *des fonctions allant de* $\mathrm{Vec}(\mathbb{H}(\mathbb{C}))$ *vers* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, *alors*

$$D(\varphi\psi) = D(\varphi)\psi + \overline{\varphi}D(\psi) - 2\sum_{k=1}^{3}\varphi_k\partial_{x_k}\psi.$$

Preuve

Pour cette preuve, nous allons simplement développer $D(\varphi\psi)$, $D(\varphi)\psi$, $\overline{\varphi}D(\psi)$ et $-2\sum_{k=1}^{3}\varphi_k\partial_{x_k}\psi$. Par soucis de légèreté, $\partial_k := \partial_{x_k}$. De plus, nous posons $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3$ et $\psi = \psi_0 + \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3$.

$$
\begin{aligned}
& D(\varphi\psi) \\
= & D[(\varphi_0\psi_0 - \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3) + (\varphi_0\psi_1 + \varphi_1\psi_0 + \varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2)e_1 \\
& + (\varphi_0\psi_2 - \varphi_1\psi_3 + \varphi_2\psi_0 + \varphi_3\psi_1)e_2 + (\varphi_0\psi_3 + \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 + \varphi_3\psi_0)e_3] \\
= & - \partial_1(\varphi_0\psi_1 + \varphi_1\psi_0 + \varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2) - \partial_2(\varphi_0\psi_2 - \varphi_1\psi_3 + \varphi_2\psi_0 + \varphi_3\psi_1) \\
& - \partial_3(\varphi_0\psi_3 + \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 + \varphi_3\psi_0) + \partial_1(\varphi_0\psi_0 - \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3)e_1 \\
& + \partial_2(\varphi_0\psi_3 + \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 + \varphi_3\psi_0)e_1 + \partial_3(\varphi_0\psi_2 - \varphi_1\psi_3 + \varphi_2\psi_0 + \varphi_3\psi_1)e_1 \\
& + \partial_1(\varphi_0\psi_3 + \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 + \varphi_3\psi_0)e_2 + \partial_2(\varphi_0\psi_0 - \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3)e_2 \\
& + \partial_3(\varphi_0\psi_1 + \varphi_1\psi_0 + \varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2)e_2 + \partial_1(\varphi_0\psi_2 - \varphi_1\psi_3 + \varphi_2\psi_0 + \varphi_3\psi_1)e_3 \\
& + \partial_2(\varphi_0\psi_1 + \varphi_1\psi_0 + \varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2)e_3 + \partial_3(\varphi_0\psi_0 - \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3)e_3 \\
= & - \partial_1\varphi_0\psi_1 - \partial_1\varphi_1\psi_0 - \partial_1\varphi_2\psi_3 + \partial_1\varphi_3\psi_2 - \varphi_0\partial_1\psi_1 - \varphi_1\partial_1\psi_0 - \varphi_2\partial_1\psi_3 + \varphi_3\partial_1\psi_2 \\
& - \partial_2\varphi_0\psi_2 + \partial_2\varphi_1\psi_3 - \partial_2\varphi_2\psi_0 - \partial_2\varphi_3\psi_1 - \varphi_0\partial_2\psi_2 + \varphi_1\partial_2\psi_3 - \varphi_2\partial_2\psi_0 - \varphi_3\partial_2\psi_1 \\
& - \partial_3\varphi_0\psi_3 - \partial_3\varphi_1\psi_2 + \partial_3\varphi_2\psi_1 - \partial_3\varphi_3\psi_0 - \varphi_0\partial_3\psi_3 - \varphi_1\partial_3\psi_2 + \varphi_2\partial_3\psi_1 - \varphi_3\partial_3\psi_0 \\
& + (\partial_1\varphi_0\psi_0 - \partial_1\varphi_1\psi_1 - \partial_1\varphi_2\psi_2 - \partial_1\varphi_3\psi_3 + \varphi_0\partial_1\psi_0 - \varphi_1\partial_1\psi_1 - \varphi_2\partial_1\psi_2 - \varphi_3\partial_1\psi_3)e_1 \\
& + (\partial_2\varphi_0\psi_3 + \partial_2\varphi_1\psi_2 - \partial_2\varphi_2\psi_1 + \partial_2\varphi_3\psi_0 + \varphi_0\partial_2\psi_3 + \varphi_1\partial_2\psi_2 - \varphi_2\partial_2\psi_1 + \varphi_3\partial_2\psi_0)e_1 \\
& + (\partial_3\varphi_0\psi_2 - \partial_3\varphi_1\psi_3 + \partial_3\varphi_2\psi_0 + \partial_3\varphi_3\psi_1 + \varphi_0\partial_3\psi_2 - \varphi_1\partial_3\psi_3 + \varphi_2\partial_3\psi_0 + \varphi_3\partial_3\psi_1)e_1 \\
& + (\partial_1\varphi_0\psi_3 + \partial_1\varphi_1\psi_2 - \partial_1\varphi_2\psi_1 + \partial_1\varphi_3\psi_0 + \varphi_0\partial_1\psi_3 + \varphi_1\partial_1\psi_2 - \varphi_2\partial_1\psi_1 + \varphi_3\partial_1\psi_0)e_2 \\
& + (\partial_2\varphi_0\psi_0 - \partial_2\varphi_1\psi_1 - \partial_2\varphi_2\psi_2 - \partial_2\varphi_3\psi_3 + \varphi_0\partial_2\psi_0 - \varphi_1\partial_2\psi_1 - \varphi_2\partial_2\psi_2 - \varphi_3\partial_2\psi_3)e_2 \\
& + (\partial_3\varphi_0\psi_1 + \partial_3\varphi_1\psi_0 + \partial_3\varphi_2\psi_3 - \partial_3\varphi_3\psi_2 + \varphi_0\partial_3\psi_1 + \varphi_1\partial_3\psi_0 + \varphi_2\partial_3\psi_3 - \varphi_3\partial_3\psi_2)e_2 \\
& + (\partial_1\varphi_0\psi_2 - \partial_1\varphi_1\psi_3 + \partial_1\varphi_2\psi_0 + \partial_1\varphi_3\psi_1 + \varphi_0\partial_1\psi_2 - \varphi_1\partial_1\psi_3 + \varphi_2\partial_1\psi_0 + \varphi_3\partial_1\psi_1)e_3 \\
& + (\partial_2\varphi_0\psi_1 + \partial_2\varphi_1\psi_0 + \partial_2\varphi_2\psi_3 - \partial_2\varphi_3\psi_2 + \varphi_0\partial_2\psi_1 + \varphi_1\partial_2\psi_0 + \varphi_2\partial_2\psi_3 - \varphi_3\partial_2\psi_2)e_3 \\
& + (\partial_3\varphi_0\psi_0 - \partial_3\varphi_1\psi_1 - \partial_3\varphi_2\psi_2 - \partial_3\varphi_3\psi_3 + \varphi_0\partial_3\psi_0 - \varphi_1\partial_3\psi_1 - \varphi_2\partial_3\psi_2 - \varphi_3\partial_3\psi_3)e_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& D(\varphi)\psi \\
&= D(\varphi_0 + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3)(\psi_0 + \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3) \\
&= [(-\partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 - \partial_3\varphi_3) + (\partial_1\varphi_0 + \partial_2\varphi_3 - \partial_3\varphi_2)e_1 + (-\partial_1\varphi_3 + \partial_2\varphi_0 + \partial_3\varphi_1)e_2 \\
&\quad +(\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1 + \partial_3\varphi_0)e_3]\,(\psi_0 + \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3) \\
&= (-\partial_1\varphi_1\psi_0 - \partial_2\varphi_2\psi_0 - \partial_3\varphi_3\psi_0) + (\partial_1\varphi_0\psi_0 + \partial_2\varphi_3\psi_0 - \partial_3\varphi_2\psi_0)e_1 \\
&\quad + (-\partial_1\varphi_3\psi_0 + \partial_2\varphi_0\psi_0 + \partial_3\varphi_1\psi_0)e_2 + (\partial_1\varphi_2\psi_0 - \partial_2\varphi_1\psi_0 + \partial_3\varphi_0\psi_0)e_3 \\
&\quad + (-\partial_1\varphi_0\psi_1 - \partial_2\varphi_3\psi_1 + \partial_3\varphi_2\psi_1) + (-\partial_1\varphi_1\psi_1 - \partial_2\varphi_2\psi_1 - \partial_3\varphi_3\psi_1)e_1 \\
&\quad + (\partial_1\varphi_2\psi_1 - \partial_2\varphi_1\psi_1 + \partial_3\varphi_0\psi_1)e_2 + (\partial_1\varphi_3\psi_1 - \partial_2\varphi_0\psi_1 - \partial_3\varphi_1\psi_1)e_3 \\
&\quad + (\partial_1\varphi_3\psi_2 - \partial_2\varphi_0\psi_2 - \partial_3\varphi_1\psi_2) + (-\partial_1\varphi_2\psi_2 + \partial_2\varphi_1\psi_2 - \partial_3\varphi_0\psi_2)e_1 \\
&\quad + (-\partial_1\varphi_1\psi_2 - \partial_2\varphi_2\psi_2 - \partial_3\varphi_3\psi_2)e_2 + (\partial_1\varphi_0\psi_2 + \partial_2\varphi_3\psi_2 - \partial_3\varphi_2\psi_2)e_3 \\
&\quad + (-\partial_1\varphi_2\psi_3 + \partial_2\varphi_1\psi_3 - \partial_3\varphi_0\psi_3) + (-\partial_1\varphi_3\psi_3 + \partial_2\varphi_0\psi_3 + \partial_3\varphi_1\psi_3)e_1 \\
&\quad + (-\partial_1\varphi_0\psi_3 - \partial_2\varphi_3\psi_3 + \partial_3\varphi_2\psi_3)e_2 + (-\partial_1\varphi_1\psi_3 - \partial_2\varphi_2\psi_3 - \partial_3\varphi_3\psi_3)e_3 \\
&= -\partial_1\varphi_1\psi_0 - \partial_1\varphi_2\psi_3 - \partial_1\varphi_0\psi_1 + \partial_1\varphi_3\psi_2 \\
&\quad - \partial_2\varphi_2\psi_0 + \partial_2\varphi_1\psi_3 - \partial_2\varphi_3\psi_1 - \partial_2\varphi_0\psi_2 \\
&\quad - \partial_3\varphi_3\psi_0 - \partial_3\varphi_0\psi_3 + \partial_3\varphi_2\psi_1 - \partial_3\varphi_1\psi_2 \\
&\quad + (\partial_1\varphi_0\psi_0 - \partial_1\varphi_1\psi_1 - \partial_1\varphi_2\psi_2 - \partial_1\varphi_3\psi_3)e_1 \\
&\quad + (\partial_2\varphi_3\psi_0 - \partial_2\varphi_2\psi_1 + \partial_2\varphi_1\psi_2 + \partial_2\varphi_0\psi_3)e_1 \\
&\quad + (-\partial_3\varphi_2\psi_0 - \partial_3\varphi_3\psi_1 - \partial_3\varphi_0\psi_2 + \partial_3\varphi_1\psi_3)e_1 \\
&\quad + (-\partial_1\varphi_3\psi_0 + \partial_1\varphi_2\psi_1 - \partial_1\varphi_1\psi_2 - \partial_1\varphi_0\psi_3)e_2 \\
&\quad + (\partial_2\varphi_0\psi_0 - \partial_2\varphi_1\psi_1 - \partial_2\varphi_2\psi_2 - \partial_2\varphi_3\psi_3)e_2 \\
&\quad + (\partial_3\varphi_1\psi_0 + \partial_3\varphi_0\psi_1 - \partial_3\varphi_3\psi_2 + \partial_3\varphi_2\psi_3)e_2 \\
&\quad + (\partial_1\varphi_2\psi_0 + \partial_1\varphi_3\psi_1 + \partial_1\varphi_0\psi_2 - \partial_1\varphi_1\psi_3)e_3 \\
&\quad + (-\partial_2\varphi_1\psi_0 - \partial_2\varphi_0\psi_1 + \partial_2\varphi_3\psi_2 - \partial_2\varphi_2\psi_3)e_3 \\
&\quad + (\partial_3\varphi_0\psi_0 - \partial_3\varphi_1\psi_1 - \partial_3\varphi_2\psi_2 - \partial_3\varphi_3\psi_3)e_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varphi}D(\psi)\\
&= (\varphi_0 - \varphi_1 e_1 - \varphi_2 e_2 - \varphi_3 e_3)D(\psi_0 + \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3)\\
&= (\varphi_0 - \varphi_1 e_1 - \varphi_2 e_2 - \varphi_3 e_3)\,[(-\partial_1\psi_1 - \partial_2\psi_2 - \partial_3\psi_3) + (\partial_1\psi_0 + \partial_2\psi_3 - \partial_3\psi_2)e_1\\
&\quad +(-\partial_1\psi_3 + \partial_2\psi_0 + \partial_3\psi_1)e_2 + (\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1 + \partial_3\psi_0)e_3]\\
&= (-\varphi_0\partial_1\psi_1 - \varphi_0\partial_2\psi_2 - \varphi_0\partial_3\psi_3) + (\varphi_0\partial_1\psi_0 + \varphi_0\partial_2\psi_3 - \varphi_0\partial_3\psi_2)e_1\\
&\quad + (-\varphi_0\partial_1\psi_3 + \varphi_0\partial_2\psi_0 + \varphi_0\partial_3\psi_1)e_2 + (\varphi_0\partial_1\psi_2 - \varphi_0\partial_2\psi_1 + \varphi_0\partial_3\psi_0)e_3\\
&\quad + (\varphi_1\partial_1\psi_0 + \varphi_1\partial_2\psi_3 - \varphi_1\partial_3\psi_2) + (\varphi_1\partial_1\psi_1 + \varphi_1\partial_2\psi_2 + \varphi_1\partial_3\psi_3)e_1\\
&\quad + (\varphi_1\partial_1\psi_2 - \varphi_1\partial_2\psi_1 + \varphi_1\partial_3\psi_0)e_2 + (\varphi_1\partial_1\psi_3 - \varphi_1\partial_2\psi_0 - \varphi_1\partial_3\psi_1)e_3\\
&\quad + (-\varphi_2\partial_1\psi_3 + \varphi_2\partial_2\psi_0 + \varphi_2\partial_3\psi_1) + (-\varphi_2\partial_1\psi_2 + \varphi_2\partial_2\psi_1 - \varphi_2\partial_3\psi_0)e_1\\
&\quad + (\varphi_2\partial_1\psi_1 + \varphi_2\partial_2\psi_2 + \varphi_2\partial_3\psi_3)e_2 + (\varphi_2\partial_1\psi_0 + \varphi_2\partial_2\psi_3 - \varphi_2\partial_3\psi_2)e_3\\
&\quad + (\varphi_3\partial_1\psi_2 - \varphi_3\partial_2\psi_1 + \varphi_3\partial_3\psi_0) + (-\varphi_3\partial_1\psi_3 + \varphi_3\partial_2\psi_0 + \varphi_3\partial_3\psi_1)e_1\\
&\quad + (-\varphi_3\partial_1\psi_0 - \varphi_3\partial_2\psi_3 + \varphi_3\partial_3\psi_2)e_2 + (\varphi_3\partial_1\psi_1 + \varphi_3\partial_2\psi_2 + \varphi_3\partial_3\psi_3)e_3\\
&= -\varphi_0\partial_1\psi_1 + \varphi_1\partial_1\psi_0 - \varphi_2\partial_1\psi_3 + \varphi_3\partial_1\psi_2\\
&\quad - \varphi_0\partial_2\psi_2 + \varphi_1\partial_2\psi_3 + \varphi_2\partial_2\psi_0 - \varphi_3\partial_2\psi_1\\
&\quad - \varphi_0\partial_3\psi_3 - \varphi_1\partial_3\psi_2 + \varphi_2\partial_3\psi_1 + \varphi_3\partial_3\psi_0\\
&\quad + (\varphi_0\partial_1\psi_0 + \varphi_1\partial_1\psi_1 - \varphi_2\partial_1\psi_2 - \varphi_3\partial_1\psi_3)e_1\\
&\quad + (\varphi_0\partial_2\psi_3 + \varphi_1\partial_2\psi_2 + \varphi_2\partial_2\psi_1 + \varphi_3\partial_2\psi_0)e_1\\
&\quad + (-\varphi_0\partial_3\psi_2 + \varphi_1\partial_3\psi_3 - \varphi_2\partial_3\psi_0 + \varphi_3\partial_3\psi_1)e_1\\
&\quad + (-\varphi_0\partial_1\psi_3 + \varphi_1\partial_1\psi_2 + \varphi_2\partial_1\psi_1 - \varphi_3\partial_1\psi_0)e_2\\
&\quad + (\varphi_0\partial_2\psi_0 - \varphi_1\partial_2\psi_1 + \varphi_2\partial_2\psi_2 - \varphi_3\partial_2\psi_3)e_2\\
&\quad + (\varphi_0\partial_3\psi_1 + \varphi_1\partial_3\psi_0 + \varphi_2\partial_3\psi_3 + \varphi_3\partial_3\psi_2)e_2\\
&\quad + (\varphi_0\partial_1\psi_2 + \varphi_1\partial_1\psi_3 + \varphi_2\partial_1\psi_0 + \varphi_3\partial_1\psi_1)e_3\\
&\quad + (-\varphi_0\partial_2\psi_1 - \varphi_1\partial_2\psi_0 + \varphi_2\partial_2\psi_3 + \varphi_3\partial_2\psi_2)e_3\\
&\quad + (\varphi_0\partial_3\psi_0 - \varphi_1\partial_3\psi_1 - \varphi_2\partial_3\psi_2 + \varphi_3\partial_3\psi_3)e_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -2\sum_{k=1}^{3}\varphi_k\partial_k\psi \\
= & -2(\varphi_1\partial_1\psi_0+\varphi_1\partial_1\psi_1e_1+\varphi_1\partial_1\psi_2e_2+\varphi_1\partial_1\psi_3e_3+\varphi_2\partial_2\psi_0+\varphi_2\partial_2\psi_1e_1 \\
& +\varphi_2\partial_2\psi_2e_2+\varphi_2\partial_2\psi_3e_3+\varphi_3\partial_3\psi_0+\varphi_3\partial_3\psi_1e_1+\varphi_3\partial_3\psi_2e_2+\varphi_3\partial_3\psi_3e_3) \\
= & -2\varphi_1\partial_1\psi_0 \\
& -2\varphi_2\partial_2\psi_0 \\
& -2\varphi_3\partial_3\psi_0 \\
& -2\varphi_1\partial_1\psi_1e_1 \\
& -2\varphi_2\partial_2\psi_1e_1 \\
& -2\varphi_3\partial_3\psi_1e_1 \\
& -2\varphi_1\partial_1\psi_2e_2 \\
& -2\varphi_2\partial_2\psi_2e_2 \\
& -2\varphi_3\partial_3\psi_2e_2 \\
& -2\varphi_1\partial_1\psi_3e_3 \\
& -2\varphi_2\partial_2\psi_3e_3 \\
& -2\varphi_3\partial_3\psi_3e_3.
\end{aligned}
$$

Ainsi, en mettant les premières, deuxièmes, ..., douzièmes lignes de chaque termes ensembles, nous obtenons l'égalité

$$D(\varphi\psi)=D(\varphi)\psi+\overline{\varphi}D(\psi)-2\sum_{k=1}^{3}\varphi_k\partial_{x_k}\psi.$$

$\blacksquare$